الدرس الأول

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

الجذر التكعيبى

الجذر التكعيبى للعدد النسبى ﺃ هو العدد الذى مكعبه يساوى ﺃ ويرمز للجذرالتكعيبى للعدد ﺃ بالرمز $\sqrt[3]{ﺃ}$

مثال

١) $\sqrt[3]{١٠٠٠} = ١٠$

٢) $\sqrt[3]{-١} = -١$

٣) $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{٣}{٢}$

٤) $\sqrt[3]{-١٢٥} = -٥$

- الجذر التكعيبى لعدد نسبى موجب يكون موجبا
- الجذر التكعيبى لعدد نسبى سالب يكون سالبا

ملاحظات

$\sqrt[3]{ﺃ^{٣}} = ﺃ$ فمثلا $\sqrt[3]{٥^{٣}} = ٥$ ، $\sqrt[3]{(-٦)^{٣}} = -٦$

$\sqrt[3]{ﺃ^{ن}} = ﺃ^{\frac{ن}{٣}}$ فمثلا $\sqrt[3]{ﺃ^{١٢}} = ﺃ^{٤}$ ، $\sqrt[3]{ﺃ^{٢١}} = ﺃ^{٧}$

تذكر أن

حجم المكعب = طول ضلع × نفسه × نفسه = $ل^{٣}$ حيث ل طول الضلع

مساحة الوجه الواحد = طول ضلع × نفسه × = $ل^{٢}$ حيث ل طول الضلع

المساحة الجانبية للمكعب = مساحة الوجه ×٤ = ٤ $ل^{٢}$ حيث ل طول الضلع

المساحة الكلية للمكعب = مساحة الوجه ×٦ = ٦ $ل^{٢}$ حيث ل طول الضلع

مثال (١)

(١) $\sqrt[3]{(15)^3} =$

الحل

$\sqrt[3]{(15)^3} = 15$

(٢) $\sqrt[3]{1\frac{37}{27}} =$

الحل

$\sqrt[3]{1\frac{37}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$

حل المعادلات الآتية

(١) $س^2 = 25$

الحل

$س^2 = 25$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$س = \pm\sqrt{25}$

$= \pm 5$

م . ح = $\{\pm 5\}$

(٢) $س^3 + 7 = 6$

الحل

$س^3 = 6 - 7$

$س^3 = -1$ بأخذ الجذر $\sqrt[3]{\ }$

$س = -1$

م . ح = $\{-1\}$

(١) $(س - 3)^3 + 5 = 4$

الحل

$(س - 3)^3 = 4 - 5$

$(س - 3)^3 = -1$

$س - 3 = -1$

$س = -1 + 3$

$س = 2$

م . ح = $\{2\}$

(٢) حوض سعته لتر واحد أحسب طول حرفه بالسنتيمتر .

الحل

حجم الحوض= ١٠٠٠ سم ^{3}

بأخذالجذر $\sqrt[3]{\ }$

طول الحرف = $\sqrt[3]{1000} = 10$سم

تمـــــاريـــــن (١)

(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	$\sqrt[٣]{١}$ = ...	(١)	$\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ...
(٢)	$\sqrt[٣]{٥١٢}$ = ...	(٢)	$\sqrt[٣]{٥١٢}$ = ...
(٣)	$\sqrt[٣]{١٠٠٠}$ = ...	(٣)	$\sqrt[٣]{س^{١٢}}$ = ...
(٤)	$\sqrt[٣]{٠,٠٦٤}$ = ...	(٤)	$\sqrt[٣]{س^{١٢} ص^{٦} ع^{١٢}}$ = ...
(٥)	$\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$ = ...	(٥)	$\sqrt[٣]{٦٤} + \sqrt[٣]{-٦٤}$ = ...
(٦)	$\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$ = ...	(٦)	$\sqrt[٣]{٢٧} + \sqrt[٣]{٦٤}$ = ...
(٧)	$\sqrt[٣]{-٢\frac{١٠}{٢٧}}$ = ...	(٧)	$\sqrt[٣]{٦٤ + ...} = ٥$
(٨)	$\sqrt[٣]{.....} = ٤$	(٨)	$\sqrt[٣]{-١٨^{٣}}$ = ...
(٩)	$\sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{-٨}$ = ...	(٩)	$\sqrt[٣]{\frac{-٨}{١٢٥}}$ = ...
(١٠)	$\sqrt{٦٤} - \sqrt[٣]{٦٤}$ = ...	(١٠)	$\sqrt[٣]{٠,٠٠١}$ = ...

(٢)	تخير الإجابة الصحيحة		
(١)	$\frac{\sqrt[٣]{٦٤}}{\sqrt{٦٤}}$ = ... ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، ١ ، −١)	(١)	$-\sqrt[٣]{-١} - ١$ = ... (٢ ، −٢ ، ٠ ، $-\frac{٣}{٢}$)
(٢)	$\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}}$ = ... (٢ ، −٢ ، ٤ ، −٤)	(٢)	$\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{-٢٧}$ = ... (٦ ، ٠ ، −٣ ، −٦)
(٣)	$\sqrt[٣]{٥^{٣}}$ = ... (٥ ، −٥ ، ٢٥ ، ١٢٥)	(٣)	$\sqrt[٣]{(\frac{١}{٨})^{٢}}$ = ... ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$)
(٤)	$\sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt{١٦}$ = ... (٠ ، −٢ ، ٨ ، −٨)	(٤)	$\sqrt[٣]{٦٤} + \sqrt{١٦}$ = ... (٠ ، ٨ ، −٨ ، ±٨)

(٥)	$\sqrt{٢٥} - \sqrt[3]{-١٢٥} = \ldots\ldots$ (١٠ ، ٠ ، ٥ ، $\pm$٥)	(٥)	$\sqrt{(-٢)^{٢}} + \sqrt[3]{(-٢)^{٣}} = \ldots\ldots$ (−٤ ، ٨ ، ٤ ، ٠)
(٦)	$\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} + \sqrt{,٢٥} = \ldots\ldots$ ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، −٢)	(٦)	$\sqrt[3]{٠,٠٠١ \times \frac{١}{٨}} = \ldots\ldots$ ($\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{١}{٢٠}$ ، ٢٠)
(٧)	اذا كان $س^{٣} = ٦٤$ فأن $\sqrt{س} = \ldots\ldots$ (٤ ، −٤ ، ٢ ، −٢)	(٧)	$\sqrt[3]{س^{٦}} = \ldots\ldots$ ($س^{٣}$ ، $س^{٢}$ ، س ، $س^{٤}$)
(٨)	اذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{٩}{س^{٢}}$ فأن س = …….. (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧)	(٨)	$-\sqrt{٢٥} = \sqrt[3]{ص}$ فأن ص = …….. (٥ ، −٥ ، ١٢٥ ، −١٢٥)

(٣) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى

(١)	$\sqrt[3]{س} = ٢$	(١)	$\sqrt[3]{س} - ٣ = -١$
(٢)	$س^{٣} + ٥ = ٣٢$	(٢)	$\sqrt[3]{س} = -\sqrt{٤}$
(٣)	$\sqrt[3]{س} = -\sqrt{٩}$	(٣)	$\sqrt[3]{س} = \frac{-١}{٢}$
(٤)	$س^{٣} = -٨$	(٤)	$س^{٣} + ٤ = ٦٨$

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلات فى ن

(١)	$س^{٣} - ٦٤ = ٠$	(١)	$(س - ٢)^{٣} + ١٠ = ١٨$
(٢)	$٨س^{٣} + ٧ = ٨$	(٢)	$(س - ٣)^{٣} - ٢ = ٦$
(٣)	$٨س^{٣} + ٢ = ٦٦$	(٣)	$س^{٣} + ٧ = ٦$
(٤)	$(س + ٣)^{٣} = ٣٤٣$	(٤)	$٨س^{٣} - ١ = ١٢٤$
(٥)	$٢س^{٣} - ٥ = س^{٣} + ٣$	(٥)	$(٣س + ١)^{٣} = -٨$
(٦)	$(٢س + ١)^{٣} - ٧ = ٢٠$	(٦)	$\sqrt[3]{س} = -\sqrt{٩}$

تـــطـــبـــيـــقـــات

أوجد كلا مما يأتى

١) طول الحرف الداخلى بالسنتيمترات لإناء مكعب الشكل سعته ٨ لتر

....

٢) طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٣٦}{١٢٥}\pi$ سم^٣ علما بأن حجم الكرة $\frac{٤}{٣}\pi$نق^٣

....

٣) طول نصف قطر كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم^٣ حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

....

٤) طول حرف مكعب حجمه $١٥\frac{٥}{٨}$ سم^٣

....

٥) المساحة الكلية لمكعب حجمه ٢١٦ سم^٣

....

٦) عدد مكعبه = ٦٤ أوجد مربعه

....

٧) إناء مكعب سعته ٨ لتر أحسب طول حرفه داخلى

....

٨) إناء مكعب سعته ١ لتر أحسب طول حرفه داخلى

....

٩) كرة حجمها $\frac{١٣٧٢}{٨١}\pi$ وحده مكعبة أوجد طول قطرها

....

١٠) أوجد طول قطرالكره التى حجمها ١١٣,٠٤ سم^٣ حيث π ٣,١٤

....

الدرس الثانى

مجموعة الأعداد غير النسبية ن َ

العدد غير النسبى

هو أى عدد تحت جذر تربيعى أو تكعيبي ولا يمكن خروجه من تحت الجذر بعدد نسبى

مثال

٢) $\sqrt[3]{٥}$ ٢) $\sqrt[3]{-٦}$

٤) $\sqrt[3]{\frac{٩}{٤}}$ ٤) $\sqrt[3]{٢٥}$

- النسبة التقريبية π

ملاحظات

ن ∩ ن َ = ϕ

ضع علامه ∈ أو ∉

(١) $\frac{١}{٣}$ .... ∈ .... ن

(٢) $\sqrt{٦}$ ... ∉ .... ن

(٣) $\sqrt[3]{٢٥}$ .. ∈ ..... ن َ

(١) $\sqrt{٤}$ ...... ∉ .... ن َ

(٢) $\sqrt{٣}$ ...... ∉ .... ن

(٣) $\sqrt[3]{١٢٥}$ ..... ∉ ..... ن َ

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

- العدد غير النسبى يمثل بعدد عشرى غير منته و غير دائرى .
- مثال:-

١) $\sqrt{٢}$ ≃ ١,٤١٤٢٠٠٠٠٠

- بدون أستخدام الآلة أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٣}$

الحل

∵ ١ < ٣ < ٤ بأخذ الجذر التربيعى للأطراف

١ < ٣ < ٤

$\sqrt{١}$ < $\sqrt{٣}$ < $\sqrt{٤}$

١ < $\sqrt{٣}$ < ٢

أى أن $\sqrt{٣}$ محصور بين ١ ، ٢

لإيجاد قيمة أقرب نختبر القيم $(١,١)^٢$، $(١,٢)^٢$ ، $(١,٣)^٢$ ، ....

نجد الأقرب $(١,٧)^٢$ = ٢,٨٩ ، $(١,٨)^٢$ = ٣,٢٤

أذن :- $\sqrt{٣}$ ≃ ١,٧ أو ١,٨

أثبت أن

أثبت أن $\sqrt[٣]{١٢}$ **ينحصر بين** ٢,٢ ، ٢,٣

الحل

$(٢,٢)^٣$ = ١٠,٦٤٨ ، $(٢,٣)^٣$ = ١٢,١٦٧ ، $(\sqrt[٣]{١٢})^٣$ = ١٢

أذن $\sqrt[٣]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

أثبت أن

أثبت أن $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ , ١,٨

الحل

$(\sqrt{٣})^٢$ = ٣ ، $(١,٧)^٢$ = ٢,٨٩ ، $(١,٨)^٢$ = ٣,٢٤

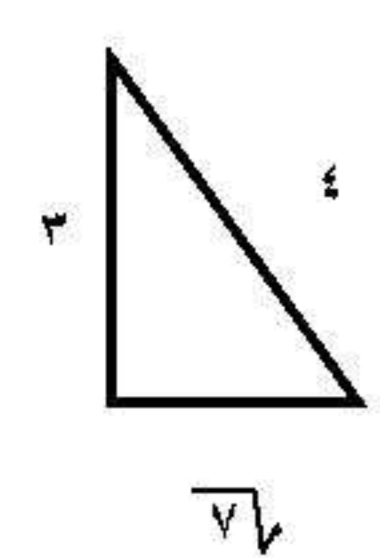
٢,٨٩ < ٣ < ٣,٢٤ ، ١,٧ < $\sqrt{٣}$ < ١,٨

العدد $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ , ١,٨

مثل العداد غير النسبية على خط الأعداد

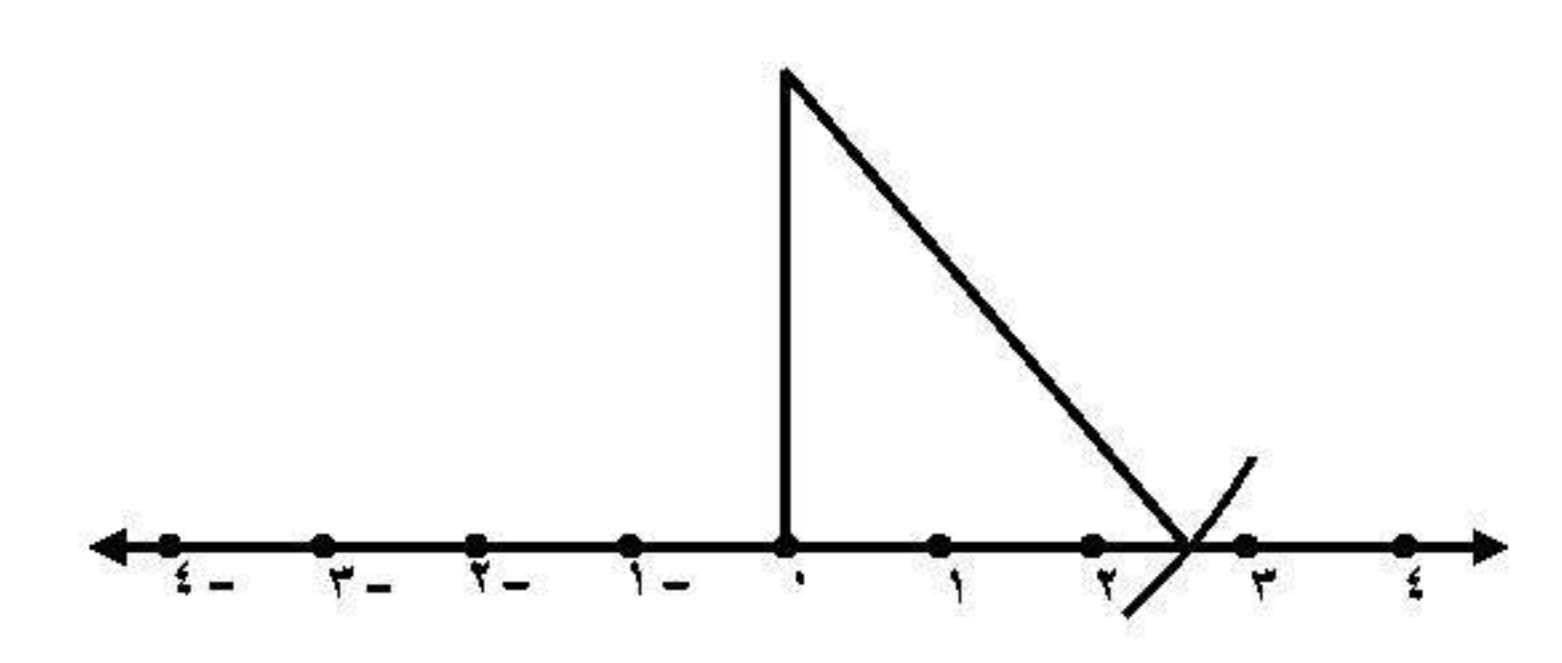
(١) مثل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد

الحل



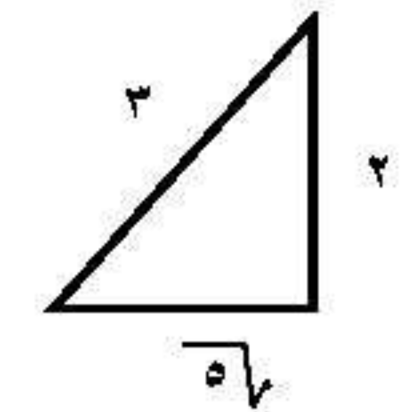
طول الوتر = $\frac{١+٧}{٢}$ = ٤

طول ضلع القائمة = $\frac{١-٧}{٢}$ = ٣



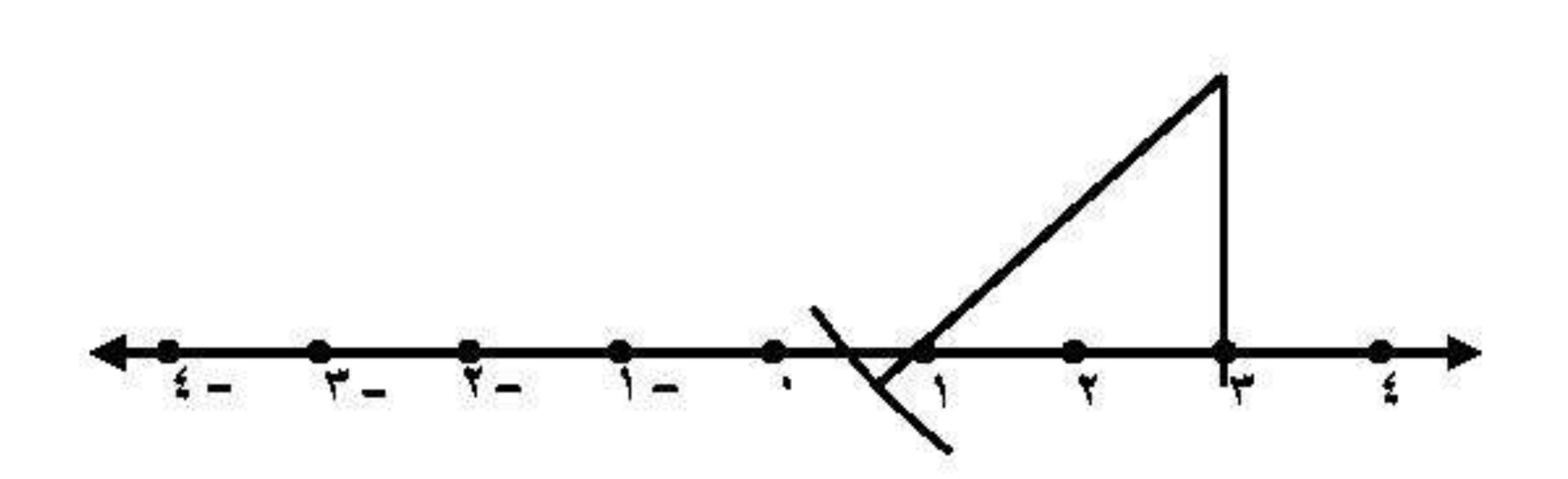
(٢) مثل العدد ٣ − $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد

الحل



طول الوتر = $\frac{١+٥}{٢}$ = ٣

طول ضلع القائمة = $\frac{١-٥}{٢}$ = ٢



تمـــــاريـــــن (٢)

(١) أيهما نسبى و أيهما غير نسبى

(١)	$\frac{-٣}{٢}$	(١)	$\sqrt{٣}$
(٢)	$\sqrt[٣]{-٨}$	(٢)	$\sqrt{١٦}$
(٣)	(-٥)	(٣)	$\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}}$
(٤)	π	(٤)	$\frac{٠}{٧}$
(٥)	$\sqrt{١١}$	(٥)	$\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$
(٦)	$\sqrt{\frac{١}{٣}}$	(٦)	$\sqrt[٣]{٣٦}$
(٧)	$\sqrt{٤} - \sqrt{١١}$	(٧)	$\sqrt[٣]{٦٤}$
(٨)	$\lvert -٣ \rvert$	(٨)	$\frac{\pi}{٢}$
(٩)	$\sqrt[٣]{٢٥}$	(٩)	$-\sqrt{٣٦}$
(١٠)	$\sqrt[٣]{٠,٣٤٣}$	(١٠)	$\sqrt{٧}$

(٢) أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما كل مما يأتى

(١)	$\sqrt{١١}$	(١)	$\sqrt[٣]{١٠}$
(٢)	$\sqrt{١٢}$	(٢)	$\sqrt[٣]{٩}$
(٣)	$\sqrt[٣]{٦٨}$	(٣)	$\sqrt{٣٠}$
(٤)	$\sqrt{٥}$	(٤)	$\sqrt[٣]{-٢٠}$

(٣) إذا كان س عدد صحيحا فأوجد قيمة س فى كل مما يأتى

(١)	$س < \sqrt{٣} < س+١$	(١)	$س < \sqrt{١٥} < س+١$
(٢)	$س < \sqrt[٣]{-١٠٠} < س+١$	(٢)	$س < \sqrt[٣]{٢٠} < س+١$

(٣)	$س < \left\vert -\sqrt{٣٥} \right\vert < س+١$	(٣)	$س < \sqrt[٣]{٥} < س+١$
(٤)	$س < \sqrt{٢} < س+١$	(٤)	$س < \sqrt[٣]{٥٠} < س+١$

(٣) أختر الإجابة الصحيحة

(١)	العدد غير نسبى فى الأعداد التالية هو...... ($\sqrt{\frac{١}{٩}}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، $\sqrt{٢}$)	(١)	العدد غير نسبى المحصور بين ٣ ، ٤ هو ($\sqrt{٢٥}$ ، $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٣٠}$ ، $\sqrt{٢}$)
(٢)	$\sqrt[٣]{(-٥)^{٣}}$ = ... (١٥ ، −٥ ، −٢٥ ، ٥)	(٢)	اقرب عدد صحيح $\sqrt{٨}$ هو .... (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)
(٣)	اذا كانت $ن \in ص_{+}$ ، $ن < \sqrt{٢٦} < ن+١$ فإن ن= .... (٢٥ ، ٥ ، −٥ ، ٢٤)	(٣)	المربع الذى طول ضلعه = $\sqrt{٣}$ سم تكون مساحته =......سم^{٢} (٣ ، ٩ ، ٢٧)
(٤)	مجموعة حل المعادلة $(س - \sqrt{٥})(س + \sqrt{٣}) = ٠$ في ن´ هى.......... ({$\sqrt{٥}$} ، {$-\sqrt{٣}$} ، {$\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٣}$})	(٤)	مجموعة حل المعادلة $س^{٢} = ١٣$ في ن´ هى .... ({$\sqrt{١٣}$} ، {$-\sqrt{١٣}$} ، $\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{٢٦}$ ، {$\sqrt{١٣}$ ، $-\sqrt{١٣}$})

(٤) أوجد فى ن´ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

(١)	$٤س^{٢} = ٢٥$	(١)	$س^{٣} + ٥ = ١٣٠$
(٢)	$\frac{٢}{٥}س^{٢} = \frac{٢٥}{٢}$	(٢)	$١٢٥س^{٣} - ٧ = ٢٠$
(٣)	$(س^{٣} + ٥)(س^{٢} - ٣) =$ صفر	(٣)	$٢س^{٢} + ١ = ٣٥$
(٤)	$٣س^{٣} + ٣ = ٢٧$	(٤)	$س^{٣} - ١ = ٧$

أثبت أن

(١) $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

....

....

(٢) $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣ ، ٤

....

....

(٣) $\sqrt[٣]{-١٧}$ ينحصر بين -٢,٦ ، -٢,٥

....

....

(٤) $\sqrt{٣}+١$ ينحصر بين ٢,٧ ، ٢,٨

....

....

(٥) $\sqrt{١٧}$ ينحصر بين ٤ ، ٥

....

....

(٦) ارسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٧}$ وحده طول واستخدامها فى تعيين النقط التى تمثل الأعداد الأتية

١) $\sqrt{٧}$ ٢) - $\sqrt{٧}$

٣) ٣ + $\sqrt{٧}$ ٤) ٢- $\sqrt{٧}$

الدرس الثالث

مجموعة الأعداد الحقيقة ح

مجموعة الأعداد الحقيقة

هى المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز ح

أى أن ح = ن ∪ نَ

ملاحظات

١) العدد صفر ليس موجب وليس سالب

٢) مجموعة الاعداد الحقيقية غير سالبة = ح+ ∪ {٠}

٣) مجموعة الأعداد الحقيقية غير موجبة = ح- ∪ {٠}

٤) ح* = ح - {٠} = ح+ ∪ ح-

٥) ن ∩ نَ = ∅

٦) ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ح وأيضا نَ ⊂ ح

٧) ح+ ∩ ح- = ∅

تمـــــــاريــــــن (٣)

(١) أكمل			
(١)	ن ∩ ن′ = ...	(١)	ح − ن = ...
(٢)	ن ∪ ن′ = ...	(٢)	ن . ن+ = ...
(٣)	ح+ ∪ ح− = ...	(٣)	ن . ن− = ...
(٤)	ح+ ∩ ح− = ...	(٤)	ن . {٠} = ...

(٢) ضع علامة > أو < أو =			
(١)	√٧ .... ٣	(١)	∛٣ − ١ .... ٢,
(٢)	√٢ − ١ .... (√٢)^−١	(٢)	١ + √٣ .... √٥
(٣)	√١٧ .... ٤	(٣)	∛٢٤ .... ٣

(٣) أكتب ٣ أعداد غير نسبية تنحصر بين			
(١)	٧ ، ٨	(١)	٣ ، ٤
(٢)	٢ ، ٤	(٢)	٥ ، ٦

رتب الأعداد الآتية تصاعديا

(١) −√٢٧ ، √٤٥ ، √٢٠ ، ٦, ، ∛−١

....

....

(٢) −√٨ ، √٣ ، √١٥ ، −√٥ ، −√٧ ، √١١

....

....

رتب الأعداد الآتية تنازليا

(١) $\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

....

....

(٢) $\sqrt{٦}$ ، ٩ ، $-\sqrt{١٠}$ ، $-\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{١٠١}$

....

....

حل كل من المعادلات الآتية فى ح

١) $س^{٢} - ٨ = ٠$

٢) $\frac{٣}{٤}س^{٢} + ٢ = -١١$

٣) $(س^{٢} - ٩)(س^{٣} - ٥) = ٠$

٤) $(٢س^{٣} - ٥)(س^{٢} + ١) = ٠$

٥) $٥س^{٣} + ٣ = ٢$

الدرس الرابع

الفترات

لاحظ الفرق

(٣،٧) زوج مرتب وهو عنصر

{٣،٧} مجموعة مكونة من عنصرين فقط ٣،٧

[٣،٧] فترة وهى مجموعة كل الأعداد الحقيقية من ٣، ٧

ملاحظات

١) $\text{ح}_+ \cup \{0\} \cup \text{ح}_- = \text{ح}$

$\text{ن} \cup \text{ن}' = \text{ح}$

$]-\infty : \infty[= \text{ح}$

٢) $\text{ح}_+ =]0 ، \infty[$

٣) $\text{ح}_- =]-\infty ، 0[$

٤) مجموعة الأعداد الحقيقية غير سالبة $= [0 ، \infty[$

٥) مجموعة الأعداد غير موجبة $=]-\infty ، 0]$

ملاحظات

$\text{س} \cap \text{ص}$ العناصر المشتركة (موجودة فى س وص)

$\text{س} \cup \text{ص}$ كل العناصر الموجودة فى س وص

$\text{س} - \text{ص}$ الموجودة فى س وغير موجودة فى ص

$\text{ص} - \text{س}$ الموجودة فى ص وغير موجودة فى س

$\text{س}'$ كل العناصر ماعدا العناصر الموجودة فى س

عبر عن المجموعة التالية بصورة فترة ومثلها على خط الأعداد

(١)	س = {أ : أ ∈ ح , ٢ ≤ أ ≤ ٦} **الحل** س = [٢ ، ٦]
(٢)	س = {أ : أ ∈ ح , ٢ ≤ أ < ٦} **الحل** س = [٢ ، ٦[
(٣)	س = {أ : أ ∈ ح , أ ≤ صفر} **الحل** س =]-∞ ، صفر]
(٤)	س = {س : س ∈ ح , س ≥ صفر} **الحل** س = [صفر , ∞[
(٥)	س = {س : س ∈ ح , س < صفر} **الحل** س =]-∞ , صفر[
(٦)	س = {أ : أ ∈ ح , ٢ < أ ≤ ٦} **الحل** س =]٢ ، ٦]
(٧)	س = {أ : أ ∈ ص , ٢ < أ < ٤} **الحل** س = {٣}

أوجد مستعينا بخط الأعداد

(١)

إذا كان س = [− ٣، ٣] ص = [− ١، ٥[

١) س ∩ ص
٢) س ∪ ص
٣) س − ص
٤) ص − س

الحل

س ∪ ص = [−٣، ٥[
س ∩ ص = [−١، ٣]
س − ص = [−٣، −١[
ص − س =]٣، ٥[

س َ = كل العناصر ماعدا العناصر الموجودة فى س   س َ = ح − [−٣، ٣]
ص َ = كل العناصر ماعدا العناصر الموجودة فى ص   ص َ = ح − [−١، ٥[

(٢)

إذا كان س =]١، ٤[، ص = { ١ ، ٤ }
أوجد س ∩ ص , س ∪ ص , س ـ ص , ص ـ س

الحل

س ∩ ص = ∅
س ∪ ص = [١ ، ٤]
س ـ ص =]١، ٤[
ص ـ س = { ١ ، ٤ }

تمــــاريـــــن (٤)

	السؤال	الاختيارات
(١)	ع = ...	(ع+ ∩ ع−، ع+ ∪ ع−،]−∞، ∞[، ن ∩ ن′)
(٢)	ع+ = ...	(]٠، ∞[،]−∞، ٠[،]٠، ∞[،]−∞، ٠])
(٣)	ع− = ...	(]٠، ∞[،]−∞، ٠[، [٠، ∞[،]−∞، ٠])
(٤)	مجموعة الاعداد الحقيقة غير سالبة = ...	(]٠، ∞[،]−∞، ٠[، [٠، ∞[،]−∞، ٠[)
(٥)	مجموعة الأعداد حقيقية غير موجبة = ...	(]٠، ∞[،]−∞، ٠[،]−∞، ٠])
(٦)	ع+ − ع− = ...	([٠، ∞[،]٠، ∞[،]−∞، ٠]،]−∞، ∞[)
(٧)	{٠} ∩ [٥، ١١] = ...	(φ، {٥}، [٥، ١١[، {١١})
(٨)	{٢، ٣} ∩ [٢، ٣[=	({٣}، {٢}، {٢، ٣}، φ)
(٩)	{٥، ٧} ∩ [٥، ٧] = ...	({٥}، {٧}، {٥، ٧}، φ)
(١٠)	{٥، ٧} ∩]٥، ٧[=	({٥}، {٧}، {٥، ٧}، φ)
(١١)	{٥، ٧} ∪]٥، ٧[=	({٥}، {٧}، {٥، ٧}، [٥، ٧])
(١٢)	مجموعة الاعداد الحقيقية = ...	(ع+، ع−، ع+ ∪ ع−، ن ∪ ن′)
(١٣)	إذا كانت س ∈]−٣، ∞[فإن.........	(س > −٣، س ≥ −٣، س < −٣، س ≤ −٣)
(١٤)	[−٣، ٤] − {−٣، ٤} = ...	([−٣، ٤]،]−٣، ٤]، [−٣، ٤[،]−٣، −٤[)
(١٥)	]٣، ٥] ∪ {٣} = ...	({٣}، {٥}،]{٣، ٥}[، [٣، ٥])
(١٦)	√٥ .... [٣، ٥]	(∈، ∉، ⊂، ⊄)
(١٧)	ع+ ∩ [−٢، ٢] = ...	([−١، ٢]،]١، ٢]، {٠، ١، ٢}،]٠، ٢])
(١٨)	ع+ ∩ {−١، ٠، ١} = ...	(ع+، {١}، {−١}، {−١، ٠، ١})
(١٩)	مجموعة جميع الأعداد الحقيقية داخل الفترة]−٧، +٧[تساوى	(٠، ٧، −١٤، −٧)

(١) س = [٢،٥] ، ص = [-١،٣[أوجد مستعينا بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′

(٢) س = [٣،٥] ، ص =]-٣،٤[أوجد مستعينا بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′

(٣) س = [-٣،٣[، ص = [٠،٥[أوجد مستعينا بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

(٤) أوجد مستعينا بخط الأعداد إذا كان س = ع+ ، ص = [-٢،٣[

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′

(٥) أوجد مستعينا بخط الأعداد إذا كان س =]-∞،٢[، ص [-١،٥]

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′

(٦) إذا كانت س = [-١،٣[، ص = [٠،٤[أوجد مستعينا بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′ ٧) س − [٠،∞[

(٧) أوجد مستعينا بخط الأعداد إذا كانت س = [-١،∞[، ص = [-٣،٤]

١) ١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص ٣) س − ص

٤) ص − س ٥) س′ ٦) ص′

(٨) س = [-٣،٤] أوجد مستعينا بخط الأعداد ع+ ∩ س ، ع+ ∪ س

(١)	عبر عن كل الفترات الآتية بالثفة المميزة		(٢) أكمل
(١)	[-١، ٢] = ...	(١)	[٣، ٥] ∪ {٣، ٥} = ...
(٢)	[١، ٣[=	(٢)	[٣، ٥] ∩ {٣، ٥} = ...
(٣)	]٠، ٣] = ...	(٣)	[٣، ٥] − {٣، ٥} = ...
(٤)	]-٢، ٣] = ...	(٤)	]٣، ٥[∪ {٣، ٥} = ...
(٥)	]-∞، -١] = ...	(٥)	]٣، ٥] ∪ {٣} = ...
(٦)	]-∞، ٤[=	(٦)	{٣، ٥} − [٣، ٥] = ...
(٧)	]-٣، ٥] = ...	(٧)	{٣، ٥} −]٣، ٥] = ...
(٨)	]-٧، ٢] = ...	(٨)	{٣، ٥} −]٣، ٥[= ....
(٩)	[٣، ٥[=	(٩)	[٣، ٥] − {٥} = ...
(١٠)	[-٣، ٢[=	(١٠)	[٣، ٥] − {٣} = ...
(١١)	[-١، ٥] = ...	(١١)	[٣، ٥] − [٣، ٤] = ...
(١٢)	[-١، ٤[=	(١٢)	]١، ١٠٠[∪]٣، ٥[= ....
(١٣)	]٢، ٦] = ...	(١٣)	]-٣، ٢] − [٠، ٢] = ...
(١٤)	]-٥، -١] = ...	(١٤)	[٣، ٥] − [٣، ٥[= ....
(١٥)	]-∞، ٣] = ...	(١٥)	[-٢، ٤] ∩ [٤، ٦] = ...
(١٦)	]-∞، ٠[=	(١٦)	ع$_{+}$ ∩ [-٣، ٣] = ...
(١٧)	]١، ٩] = ...	(١٧)	ع$_{-}$ ∪]-١، ٤] = ...
(١٨)	]-٢، ١] = ...	(١٨)	س ∩]-١، ٣[= ....
(١٩)	[-٣، -٢[=	(١٩)	ع$_{-}$ ∩ [-٣، ٢[= ....
(٢٠)	[٠، ١[=	(٢٠)	ع$_{+}$ ∩ [٠، ٥] = ...

مراجعه (١)

	(١) أكمل		(٢) أكمل
(١)	س = ١٠ فإن $\frac{١}{٢}$ س = ...	(١)	$\sqrt{٥}$ ينحصر بين.......و..........
(٢)	مجموعة حل المعادلة $س^٢$ +٩ = ٠ هى	(٢)	$\sqrt{٧}$ ينحصر بين ....و..........
(٣)	مجموعة حل المعادلة $س^٢$ - ٩ = ٠ هى	(٣)	$\sqrt{٢٧}$ ينحصر بين .... و.........
(٤)	مجموعة الجذران التربيعيان للعدد ٦٣ =..................	(٤)	$\sqrt[٣]{١٢}$ ينحصر بين .... و.........
(٥)	$\sqrt{٠,٢٥}$ =..................	(٥)	ح = ...
(٦)	$\sqrt{٦\frac{١}{٤}}$ =..................	(٦)	$ح_+$ =..................
(٧)	$\sqrt{٢٥}$ − $\sqrt{٩}$ = $\sqrt{......}$	(٧)	$ح_-$ =..................
(٨)	$\sqrt[٣]{-٨}$ =..................	(٨)	مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة = ...
(٩)	$\sqrt[٣]{٢٧}$ − $\sqrt{٢٥}$ =..................	(٩)	[٢،٥] − {٢،٥} = ...
(١٠)	$\sqrt{١٦}$ = $\sqrt[٣]{......}$	(١٠)	[٣،٦] − {٦} = ...
(١١)	$\sqrt[٣]{٨س^٣}$ =..................	(١١)	]٢،١] ∪ [−٢،٣] =..................
(١٢)	مجموعة حل المعادلة $س^٣$ -٦٤ = ٠ هى	(١٢)	[١،٥] ∪ [−٢،٣] =..................
(١٣)	| $\sqrt[٣]{-٨}$ | =..................	(١٣)	]٢،٥] ∩ [٣،٧] =..................
(١٤)	مجموعة حل المعادلة $س^٣$ + ٥ = ١٣ فى ح هى	(١٤)	{٢،٥} − [٢،٥] =..................

(١٥)	$س^٢ = ٢٥$ فإن س = ...	(١٥)	{٢، ٥} − {٣، ٤، ٥} = ...
(١٦)	$س^٣ = ١٢٥$ فإن س = ...	(١٦)	{٢، ٥} −]٢، ٥] = ...
(١٧)	$س^٣ = ٦٤$ فإن $\sqrt{س}$ = ...	(١٧)	{٢، ٥} ∪]٢، ٥] = ...
(١٨)	الجذر التكعيبى للعدد ٠,٠٠٨ = ...	(١٨)	$\sqrt{٣}$ ينحصر بين .... و.........
(١٩)	أوجد أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt{٢٤}$ هو	(١٩)	$\sqrt{٦}$ ينحصر بين .... و.........
(٢٠)	أوجد أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt{١٧}$ هو	(٢٠)	$\sqrt{٢٣}$ ينحصر بين .... و.........

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلات فى ح

(١)	$س^٢ + ٣ = ١٢$	(١)	$(س − ٣)^٣ + ١ = ١٢٦$
(٢)	$٣س^٢ − ٢ = ١٠$	(٢)	$س^٢ − ٥ = −١$
(٣)	$س^٣ − ١٢٥ = ٠$	(٣)	$س^٢ − ٥ = ٣$
(٤)	$٢٧س^٢ − ١ = ١٠$	(٤)	$س^٢ − ٢ = ٧$
(٥)	$(س + ٥)^٣ = ١٢٥$	(٥)	$س^٢ + ٢٥ = ٠$

الدرس الخامس

العمليات على الأعداد الحقيقة

قوانين

١) $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ\ ب}$

فمثلا $\sqrt{٢} \times \sqrt{٥} = \sqrt{١٠}$

٢) $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ فمثلا $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{\frac{٥}{٣}}$

٣) $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = \sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

فمثلا $\sqrt{١٦^{٢}} = ١٦$

خواص الجمع

١) إنغلاق ٢) جمع ٣) ابدالية

لا نجمع الا الجذور المتشابهة

فمثلا $٤\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} = ٩\sqrt{٢}$

$٦\sqrt{٧} + ٥\sqrt{٣} =$ لا يمكن جمعهم

تذكر المعكوس الجمعى $\sqrt{٥}$ هو $-\sqrt{٥}$ بتغير الاشارة ،

محايد جمعى هو صفر

خواص الضرب

١) عملية ضرب الأعداد الحقيقية مغلقة
٢) عملية ضرب الأعداد الحقيقية ابدالية
٣) عملية ضرب الأعداد الحقيقية دامجة
٤) المحايد الضربى فى ح هو ١

أمثلة

(١)	$5\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$
(٢)	$7\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} - 6\sqrt{5} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$
(٣)	المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ هو $-(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$
(٤)	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$
(٥)	$(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$
(٦)	$3\sqrt{2}\,(4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) = 12\sqrt{6} - 6\sqrt{10}$
(٧)	$3\sqrt{2}\,(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) = 30 + 12\sqrt{6}$
(٨)	$\sqrt{7}\,(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) = 3\sqrt{21} - 14$
(٩)	$(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{7}) = \sqrt{6} - \sqrt{21} - \sqrt{10} + \sqrt{35}$
(١٠)	$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) = 6 - 4\sqrt{15} - 3\sqrt{15} + 30$ $= 36 - 7\sqrt{15}$

تمارين (٥)

(١)	أكمل		(٢) أكمل
(١)	المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧}$ هو	(١)	$٢\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧} =$ ....
(٢)	المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{٧}$ هو	(٢)	$-٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥} =$ ....
(٣)	المعكوس الجمعى للعدد $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ هو	(٣)	$-٢\sqrt{٣} - \sqrt{٣} =$ ....
(٤)	المعكوس الجمعى للعدد $٣ - \sqrt{٥}$ هو	(٤)	$\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} =$ ....
(٥)	المعكوس الجمعى للعدد $٣ + \sqrt{٢}$ هو	(٥)	$\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} =$ ....
(٦)	المعكوس الجمعى للعدد $-٣ - \sqrt{٢}$ هو	(٦)	$\sqrt{٦} \times \sqrt{٥} =$ ....
(٧)	المحايد جمعى فى ح هو..........	(٧)	$\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} =$ ....
(٨)	المعكوس الجمعى $(٣س)^٢$ هو	(٨)	$\sqrt{٣} \times \sqrt{٥} =$..............
(٩)	المعكوس الجمعى $٣س^٢$ هو.....	(٩)	$٣\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢} =$..........
(١٠)	المعكوس ضربى للعدد $\frac{٣}{٥}$ هو	(١٠)	$٥\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} =$ ....
(١١)	المعكوس ضربى للعدد $\frac{-٣}{٥}$ هو.....	(١١)	$٢\sqrt{٧} \times ٢ =$ ....

(١٢)	المعكوس الضربى للعدد $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ هو	(١٢)	$(\sqrt{٧})^{٢}$ = ...
(١٣)	المعكوس الضربى للعدد -١ هو....	(١٣)	$(٢\sqrt{٣})^{٢}$ = ...
(١٤)	المعكوس الضربى للعدد صفر هو...	(١٤)	$٦\sqrt{٣} \div ٢\sqrt{٣}$ = ...
(١٥)	$٢\sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$ = ...	(١٥)	$\sqrt{\frac{٥}{٩}} \times \sqrt{\frac{٩}{٥}}$ = ...
(١٦)	$٢\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٧}$ = ...	(١٦)	$٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$ = ...
(١٧)	$٧\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}$ = ...	(١٧)	$-٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥}$ = ...
(١٨)	$٣\sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ = ...	(١٨)	$٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$ = ...
(١٩)	$٢\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٦}$ = ...	(١٩)	$٢\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٥} + \sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}$ = ...
(٢٠)	$٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}$ = ...	(٢٠)	$٦\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}$ = ...

(٢)	**أوجد فى أبسط صورة**		
(١)	$٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$	(١)	$\sqrt{٥} - \sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$
(٢)	$٢\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٥} + \sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}$	(٢)	$٢\sqrt{٣} + ٥ + ٣\sqrt{٣} - ٩$
(٣)	$٦\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}$	(٣)	$٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$
(٤)	$\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣}$	(٤)	$(\sqrt{٢} + ١)(\sqrt{٢} - ١)$
(٥)	$٥\sqrt[٣]{٧} - ٨\sqrt[٣]{٧} + ٢\sqrt[٣]{٧}$	(٥)	$(٤ - ٣\sqrt{٢})(٤ + ٣\sqrt{٢})$
(٦)	$(\sqrt{٥} - ١)^{٢}$	(٦)	$(\sqrt{٣} + ٢)(\sqrt{٣} - ٢)$
(٣)	**أوجد فى أبسط صورة**		
(١)	$\frac{٣}{\sqrt{٣}}$	(١)	$\frac{\sqrt{٥} - ١٥}{٢\sqrt{٥}}$
(٢)	$\frac{٨}{\sqrt{٦}}$	(٢)	$\frac{\sqrt{٢} + ٣}{\sqrt{٢}}$

(٢) أوجد فى أبسط صورة

(١)	$٢(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})$	(١)	$-\sqrt{٣}(-٥ - \sqrt{٣})$
(٢)	$\sqrt{٣}(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})$	(٢)	$\sqrt{٥}(٣ - \sqrt{٥}) - ٢(١ + \sqrt{٥})$
(٣)	$\sqrt{٢}(٥ + \sqrt{٣})$	(٣)	$\sqrt{٧}(\sqrt{٧} - ٧)$
(٤)	$\sqrt{٧}(\sqrt{٧} + ٢)$	(٤)	$-\sqrt{٧}(-٥ - \sqrt{٧})$

(٢) أختر الاجابة الصحيحة

(١)	$\sqrt{٣} - \sqrt{٣} =$ .... ($٢\sqrt{٣}$ ، ٠ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$)	(١)	$(٢\sqrt[٣]{٥})^{٣} =$ .... (١٠ ، ٢٠ ، $٤\sqrt[٣]{٥}$ ، ٤٠)
(٢)	$٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} =$ .... ($٥\sqrt{٦}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٦\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt[٣]{٣}$)	(٢)	المعكوس ضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو .. (-٥ ، $\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$)
(٣)	$٥ + ٧\sqrt{٢} - ٤ + \sqrt{٢} =$ .... (١٥ ، $١ + ٧\sqrt{٢}$ ، $١ + ٨\sqrt{٢}$ ، $١ + ٦\sqrt{٢}$)	(٣)	المعكوس ضربى $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو........ ($\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٦}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)
(٤)	$٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} =$ .... (-٦ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٦)	(٤)	المعكوس ضربى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ هو .... ($\sqrt{٣}$ ، ٣ ، $-\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$)

الدرس السادس

العمليات على الجذور التربيعية

أمثلة

(١) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 4} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

(٢) $\sqrt{12} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 4} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} =$ صفر

(٣)

$3\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{8}$

$= 3\sqrt{2 \times 25} - 2\sqrt{2 \times 9} + 3\sqrt{2 \times 4}$

$= 3 \times 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{2}$

$= 15\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

(٤)

$3\sqrt{20} - 4\sqrt{80} + 2\sqrt{45}$

$= 3\sqrt{4 \times 5} - 4\sqrt{5 \times 16} + 2\sqrt{5 \times 9}$

$= 3 \times 2\sqrt{5} - 4 \times 4\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5}$

$= 6\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$

(٥)	$(٢ + \sqrt{٣})^{٢} - \sqrt{٤٨}$ $= ٤ + ٤\sqrt{٣} + ٣ - \sqrt{٣ \times ١٦}$ $= ٧ + ٤\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} = ٧$
(٦)	$\sqrt{٢٧} = \sqrt{٩ \times ٣} = ٣\sqrt{٣}$
(٧)	$٥\sqrt{٥٤} = ٥\sqrt{٩ \times ٦} = ٥ \times ٣\sqrt{٦} = ١٥\sqrt{٦}$
(٨)	$٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٣} = \sqrt{٦}$
(٩)	$(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})^{٢} = ٥ + ٢\sqrt{١٠} + ٢ = ٧ + ٢\sqrt{١٠}$
(١٠)	$(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})(\sqrt{٥} + \sqrt{٢}) = ٥ - ٢ = ٣$

تمارين (٦)

(١)	ضع كلا مما يأتى على صورة $أ\sqrt{ب}$	(٢)	أكمل
(١)	$\sqrt{١٢} =$	(١)	$٤\sqrt{٢٠} =$ ....
(٢)	$\sqrt{١٢٥} =$	(٢)	$\sqrt{٥٠} =$ ....
(٣)	$\sqrt{٨} =$	(٣)	$\sqrt{٢٧} =$ ....
(٤)	$\sqrt{١٢٠} =$	(٤)	$\sqrt{١٠٠} =$ ....
(٥)	$\sqrt{٢٨} =$	(٥)	$٥\sqrt{١٨} =$ ....
(٦)	$٥\sqrt{\frac{١}{٥}} =$	(٦)	$\frac{٢}{٥}\sqrt{١٠٠٠} =$ ....
(٧)	$٢\sqrt{٧٢} =$	(٧)	$٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} =$ ....
(٨)	$٦\sqrt{\frac{١}{٣}} =$	(٨)	$\sqrt{٤٠} =$ ....

(٢)	أوجد فى أبسط صورة		
(١)	$\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$	(١)	$\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$
(٢)	$\sqrt{٤٥} - \sqrt{٢٠}$	(٢)	$\sqrt{٤٥} - \sqrt{٢٧} - \sqrt{٢٠} + ٤\sqrt{٣}$
(٣)	$٤\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$	(٣)	$\sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{\frac{١}{٢}}$
(٤)	$\sqrt{٢٠} - \sqrt{٥} + \sqrt{٤٥}$	(٤)	$\sqrt{٤٨} + ٢\sqrt{٧٢} - ٦\sqrt{\frac{١}{٣}}$
(٥)	$٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$	(٥)	$\sqrt{٢٧} + \sqrt{١٢} - \sqrt{٤٨} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}}$
(٦)	$\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{٢}$	(٦)	$\sqrt{٧٥} - \sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢}$

(١) أوجد كل مما يأتى س + ص ، س × ص

١) $س = ٣ + \sqrt{٥}$ ، $ص = ١ - \sqrt{٥}$

٢) $س = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

٣) $س = ٥ - ٣\sqrt{٢}$ ، $ص = ٥ - ٣\sqrt{٢}$

(٢) اذا كان $أ = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ب = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

أوجد

١) أ+ب ٣) أ − ب

٢) أب ٤) $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

(٣) أكمل

١) $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، .... بنفس النمط

٢) $س^{٢} = ٥$ فإن $(س + \sqrt{٥})^{٢}$ = ... أو ....

٣) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٦} = ٣ \times$ ....

٤) $٢\sqrt{٢٧} - ٢\sqrt{٤٨} = س\sqrt{٣}$ فإن س ....

٥) $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٣}} \div \frac{\sqrt{٧٢}}{\sqrt{٢}} =$ ....

٦) $س = \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}}$ فإن $س^{-١} =$ ....

٧) $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} =$ ....

الدرس السابع

العددان المترافقان

قوانين

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ مرافقة $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$ بتغير اشارة حد واحد فقط

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ معكوس جمعى $- \sqrt{أ} - \sqrt{ب}$ بتغير اشارة الحدين

معكوس جمعى للعدد $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ هو ....

مرافق العدد $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ هو .... أو ....

مرافق العدد $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ هو ....

خواص الجمع

العدد × مرافقه = مربع الاول – مربع ثانى

$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$

$(س + ص)(س - ص) = س^2 - ص^2$

تذكر أن

١) $(س + ص)^2 = س^2 + 2سص + ص^2$ ومنها

$س^2 + سص + ص^2 = (س + ص)^2 - سص$

$س^2 + ص^2 = (س + ص)^2 - 2سص$

٢) $(س - ص)^2 = س^2 - 2سص + ص^2$ ومنها

$س^2 - سص + ص^2 = (س - ص)^2 + سص$

$س^2 + ص^2 = (س - ص)^2 + 2سص$

أمثلة

(١) أوجد فى أبسط صورة

فكرة الحل هى ضرب البسط والمقام فى مرافق المقام

$$\frac{٤}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$$

$$\frac{٤}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}\times\frac{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}$$

$$=\frac{٤(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٥-٣}=٢(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})$$

(٢) إذا كان س = $\frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٧}-\sqrt{٣}$ أثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد

س^٢ − ٢س ص + ص^٢

الحل

$$س=\frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}}\times\frac{\sqrt{٧}+\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}+\sqrt{٣}}=\frac{٤(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{٧-٣}=\sqrt{٧}+\sqrt{٣}$$

∴ س ، ص مترافقان

$$س^٢-٢س ص+ص^٢=(س-ص)^٢=(\sqrt{٧}+\sqrt{٣}-\sqrt{٧}+\sqrt{٣})^٢$$

$$=(٢\sqrt{٣})^٢=١٢$$

(٣) إذا كان س = $\sqrt{٧}+\sqrt{٥}$ ، ص = $\frac{٢}{س}$ أوجد قيمة $\frac{س+ص}{س ص}$

الحل

$$ص=\frac{٢}{س}=\frac{٢}{\sqrt{٧}+\sqrt{٥}}=\frac{٢}{\sqrt{٧}+\sqrt{٥}}\times\frac{\sqrt{٧}-\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}-\sqrt{٥}}$$

$$=\frac{٢(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}{٧-٥}=\sqrt{٧}-\sqrt{٥}$$

$$س+ص=\sqrt{٧}+\sqrt{٥}+\sqrt{٧}-\sqrt{٥}=٢\sqrt{٧}$$

$$س ص=(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})=٧-٥=٢$$

$$\frac{س+ص}{س ص}=\frac{٢\sqrt{٧}}{٢}=\sqrt{٧}$$

تمارين (٧)

(١)	أكتب مرافق كل من الاعداد الاتية	(٢)	أجعل المقام عددا نسبيا
(١)	$\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$	(١)	$\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$
(٢)	$\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$	(٢)	$\frac{٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$
(٣)	$٢ - \sqrt{٣}$	(٣)	$\frac{٤}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$
(٤)	$\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$	(٤)	$\frac{٤}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$
(٥)	$- \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$	(٥)	$\frac{\sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$
(٦)	$- \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$	(٦)	$\frac{\sqrt{٧} + ٣}{\sqrt{٧} - ٣}$

(٢)	أكمل		
(١)	$(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} - \sqrt{٥}) =$	(١)	المعكوس ضربى $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ هو = ...
(٢)	$س = ٣ + \sqrt{٢}$ مرافق .... أو	(٢)	المعكوس ضربى $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ هو = ...
(٣)	مرافق العدد $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ هو	(٣)	المعكوس ضربى $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو = ...

(٤)	المعكوس ضربى للعدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ = فى أبسط صورة هو	(٤)	مرافق العدد $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ فى أبسط صورة هو ....
(٥)	س = ٢ + $\sqrt{٥}$ ، ص للعدد المرافق للعدد س فأن $(س - ص)^{٢}$ = ...	(٥)	س = $\sqrt[٣]{٣} + ١$ ، ص = $\sqrt[٣]{٣} - ١$ فأن $(س + ص)^{٣}$ = ...
(٦)	$\frac{س}{٥ - \sqrt{٥}} = ٥ + \sqrt{٥}$ فإن قيمة س = ...	(٦)	المعكوس جمعى $- \sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ هو = ...ومرافقه هو........
(٧)	إذا كان $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فأن قيمة س فى أبسط صورة=	(٧)	المعكوس ضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو = ...
(٨)	إذا كان $س^{-١} = \frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$ فأن س = ...	(٨)	المعكوس ضربى ٢ + $\sqrt{٣}$ هو = ...

(١)	إذا كان س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ أثبت ان س ،ص مترافقان ثم اوجد $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$
(٢)	س = $\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ ، س ص = ٢ أثبت ان س ،ص مترافقان ثم اوجد $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$

(٣)	$\text{س} = ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = \frac{٥}{\sqrt{٨} - \sqrt{٣}}$ أثبت ان س ،ص مترافقان ثم اوجد $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س ص}}$
(٤)	إذا كان $\text{أ} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $\text{ب} = \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ أوجد قيمة $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ ب}}\right)^{٢}$
(٥)	إذا كان $\text{أ} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $\text{ب} = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ أوجد قيمة $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ ب}}$
(٦)	$\text{س} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ أوجد قيمة $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س ص} - ١}$
(٧)	$\text{س} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ ١- إثبت ان س ، ص مترافقان ٢- أوجد قيمة $(\text{س} + \text{ص}) \div (\text{س ص})$
(٨)	$\text{أ} = \sqrt{٥} + ٢$ ، $\text{ب} = \sqrt{٥} - ٢$ أوجد قيمة $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ ب}}$
(٩)	$\text{س} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ ١) إثبت ان س ، ص مترافقان ٢) أوجد قيمة س ، ص ٣) $\text{س} + \text{ص}$ ٤) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$ ٥) $\text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ ٦) $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢}$ ٧) $(\text{س} - \text{ص})^{٢}$

(١٠)

$س = \sqrt{٧} - \sqrt{٢}$ $\qquad$ $ص = \frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$

١) أثبت ان س ، ص مترافقان $\qquad$ ٢) س + ص

٣) س × ص $\qquad$ ٤) $\frac{س + ص}{س \times ص}$

٥) $\frac{س - ص}{س ص}$ $\qquad$ ٦) $س^{٢} + ص^{٢}$

٧) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س ص$ $\qquad$ ٨) $س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢}$

(١١)

$س = \sqrt{٥} - ٢$ ، ص مرافق س أوجد قيمة $(س - ص)^{٥}$

(١٢)

$س = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ $\qquad$ $س ص = ٢$

اثبت ان س ، ص عددان مترافقان

(١٣)

$س = \frac{١}{٢ + \sqrt{٣}}$ $\qquad$ $ص = \frac{١٢}{\sqrt{٣}}$

أوجد قيمة $س^{٢} + ص^{٢}$

(١٤)

إذا كان $س = \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ ، ص هى المعكوس ضربى للعدد س

أوجد ص ثم أثبت إن $(س + ص)^{٢} = ١٢$

(١٥)

$س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$

أوجد قيمة $\frac{س + ص}{س ص}$

(١٦)

$س = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ $\qquad$ $ص^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$

اثبت ان س ، ص مترافقان ثم اوجد قيمة $س^{٢} ص^{٢}$

الدرس الثامن

العمليات على الجذور التكعيبية

قوانين

١) $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أب}$

$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

٢) $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ حيث ب $\neq$ صفر

$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$

أمثلة

(١)	**أوجد فى أبسط صورة** $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$
(٢)	$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{12}$
(٣)	$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5 \times 8} = 2\sqrt[3]{5}$
(٤)	$\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} - 5\sqrt[3]{-54}$ الحل $= \sqrt[3]{2 \times 8} - 2\sqrt[3]{2 \times 125} - 5\sqrt[3]{-2 \times 27}$ $= 2\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$
(٥)	إذا كانت س $= \sqrt[3]{3} + 1$, ص $= \sqrt[3]{3} - 1$ أوجد $(س + ص)^3$, $(س - ص)^3$ الحل $(س + ص)^3 = (\sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3} - 1)^3 = (2\sqrt[3]{3})^3 = 24$ $(س - ص)^3 = (\sqrt[3]{3} + 1 - \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2)^3 = 8$

تمارين على الجذور التكعيبية(٨)

(١)	أكمل		أكمل
(١)	$\sqrt[3]{١٦} =$	(١)	$\sqrt[3]{١٠٨} =$ ....
(٢)	$\sqrt[3]{٣٧٥} =$	(٢)	$\sqrt[3]{\frac{٧٢}{٩}} =$ ....
(٣)	$\sqrt[3]{٢٤} =$	(٣)	$\sqrt[3]{١٣٥} =$ ....
(٤)	$\sqrt[3]{٥٠٠} =$	(٤)	$٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}} =$ ....
(٥)	$\sqrt[3]{٤٠} =$	(٥)	$\sqrt[3]{١٢٨} =$ ....
(٦)	$\frac{١}{٣}\sqrt[3]{٢٧} =$	(٦)	$\frac{٢}{٣}\sqrt[3]{-١٣٥} =$ ....
(٧)	$\sqrt[3]{٤٨} =$	(٧)	$\sqrt[3]{١٩٢} =$ ....
(٨)	$٣\sqrt[3]{\frac{١}{٩}} =$	(٨)	$\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣٢} =$ ....
(٩)	$\sqrt[3]{٥٤} =$	(٩)	$\sqrt[3]{٢٥٠} =$ ....
(١٠)	$\frac{١}{٢}\sqrt[3]{٦٤} =$	(١٠)	$-١٠\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}} =$ ....
(١١)	$\sqrt[3]{٨١} =$	(١١)	$\sqrt[3]{٥٤} =$ ....

(٢)	أوجد فى أبسط صورة		
(١)	$\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢}$	(١)	$\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{١٠} \times \sqrt[3]{٢٥}$
(٢)	$\sqrt[3]{١٢٥} - \sqrt[3]{٢٤}$	(٢)	$\sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{١٣\frac{٨}{٩}}$
(٣)	$\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤}$	(٣)	$\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤} - ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٩}}$
(٤)	$\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢٥٠}$	(٤)	$\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{-\frac{١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦}$

(٥)	$2\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$	(٥)	$\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
(٦)	$\sqrt[3]{16} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-2}$	(٦)	$\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$
(٧)	$\sqrt{18} + \sqrt[3]{54} - \frac{216}{121} - \sqrt[3]{16}$	(٧)	$\frac{2}{3}\sqrt{18} + \sqrt[3]{54} - 7\sqrt{2}$
(٨)	$5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{200} + (\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25})$	(٨)	$\sqrt{27} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} - 1$

أسئلة مقالية

(١) أثبت أن $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} =$ صفر

(٢) أثبت أن $\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{16} \div (\sqrt[3]{4} \times 6) = 1$

(٣) إذا كانت $أ = \sqrt[3]{5} + 1$ ، $ب = \sqrt[3]{5} - 1$

أحسب قيمة كلا مما يأتى ١) $(أ - ب)^5$ ٢) $(أ + ب)^5$

(٤) **س٩ أختر الأجابة الصحيحة**

١) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{-2} =$ .... ($\sqrt[3]{52}$ ، $2\sqrt[3]{2}$ ، $4\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{2}$)

٢) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{16} =$ .... (٠ ، ٨ ، −٨ ، ±٨)

٣) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} =$ .... (٨ ، −٢ ، ٢ ، $2\sqrt[3]{2}$)

٤) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} =$ .... ($\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{16}$)

(٥) **س٨ أكمل بأجابة صحيحة**

١) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{-12} =$ ....

٢) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt{\dots\dots}$

٣) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} = \sqrt[3]{\dots\dots}$

٤) $س = 2$ ، $ص = \sqrt[3]{-16}$ فأن $(\frac{ص}{س})^3 =$ ....

الدرس التاسع تطبيقات على الأعداد الحقيقية

المكعب

بفرض ان طول ضلعه ل فإن :

1) حجمه = $ل^3$ وحده مكعبة
2) مساحة الوجه الواحد = $ل^2$ وحده مربعه
3) مساحة الكلية = ٦ $ل^2$ وحده مربعه
4) مساحة جانبية = ٤ $ل^2$ وحده مربعه

تذكر ان المكعب له ١٢ حرف

تمارين على المكعب

(١)	أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه ١٢٥ سم^3 **الحل** حجم المكعب = $ل^3$ = ١٢٥ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين ل = $\sqrt[3]{١٢٥}$ = ٥ سم المساحة الكلية للمكعب = ٦ $ل^2$ = ٦ × ٥ × ٥ = ١٥٠ سم^2
(٢)	أوجد طول حرف مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^3 **الحل** حجم المكعب = $ل^3$ = ٢ $\sqrt{٢}$ $ل^3$ = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ ل = $\sqrt{٢}$ سم
(٣)	أوجد حجم مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^2 **الحل** المساحة الكلية للمكعب = ٦ $ل^2$ = ٢٩٤ $ل^2$ = ٢٩٤ ÷ ٦ $ل^2$ = ٤٩ ل = $\sqrt{٤٩}$ ل = ٧ سم حجم المكعب = $ل^3$ = ٧^3 = ٣٤٣ سم^3

متوازى المستطيلات

هو جسم يحتوى على سته أوجه مستطيله وكل وجهين متقابلين منهما متطابقان وبفرض ان أطوال أحرفه س ، ص ، ع

فإن ١) حجمه = مساحة قاعدة × الارتفاع

= س × ص × ع وحده مكعبة

٢) مساحة كلية = ٢ (س ص + ص ع + ع س)

٣) مساحة جانبية = محيط قاعدة × الارتفاع

تمارين على متوازى المستطيلات

(١)	أوجد حجم متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم , $\sqrt{٣}$ سم , $\sqrt{٦}$ سم **الحل** حجم متوازى المستطيلات = الطول × العرض × الإرتفاع = $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٦}$ = ٦ سم^٣
(٢)	) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٧٢٠ سم^٣ و ارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية **الحل** حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الإرتفاع = ٧٢٠ مساحة القاعدة × ٥ = ٧٢٠ مساحة القاعدة = ٧٢٠ ÷ ٥ = ١٤٤ سم^٢ مساحة القاعدة (مربع) = ل^٢ = ١٤٤ ل = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات = ٢(س ص + س ع + ص ع) = ٢(١٢ × ١٢ + ١٢ × ٥ + ١٢ × ٥) = ٥٢٨ سم^٢





تمارين على المكعب و متوازى المستطيلات (٩)

(١)	أكمل		أكمل
(١)	مكعب حجمه ١ سم^٣ فإن مجموع أطوال أحرفه = ...سم (١، ٦، ٨، ١٢)	(١)	إذا كان طول حرف المكعب ٥سم فإن حجمه = ... سم^٣ (٢٥، $\frac{١}{٥٢}$، ١٢٥، ٩٥)
(٢)	مكعب حجمه ٦٤ سم^٣ فإن مساحته الجانبية = ...سم^٢ (٤، ٨، ٦٤، ٩٦)	(٢)	إذا كان مساحة الأوجه الستة لمكعب٥٤ سم^٢ فإن حجمه = ... سم^٣ (٥٤، ٤٤، ٧٢، ٢٧)
(٣)	مكعب طول حرفه ٢ ل فإن حجمه = ... (٦ل، ٨ل، ٨ل^٣، ٩ل)	(٣)	مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^٣ فإن طول حرفه = ...سم ($\sqrt{٢}$، ٢، ٨، ١٠٥)
(٤)	مكعب حجمه ل^٣ فإن مساحته الكلية = ...سم^٢ (٤ل^٢، ٢ل^٢، ٦ل^٣، ٦ل^٢)	(٤)	إذا كان حجم مكعب ٦٤ سم^٣ فإن طول قطر حرفيه = ...سم (١٦، ٤$\sqrt{٢}$، ٣٢، ٦٤)
(٥)	مكعب طول حرفه ٤سم فإن مساحته الكلية = ...سم^٢ (٦٩، ٩٦، ٣٥، ٦٤)	(٥)	مكعب طول حرفه ٣ل فإن حجمه = ... (٦ل، ٨ل، ٢٧ل^٣، ٩ل)

(١)	أسئلة مقالية مكعب طول حرفه = ٢ أوجد ١- حجمه ٢- المساحة الجانبية ٣- مساحة الوجه الواحد ٤- المساحة الكلية ٥- مجموع أطوال احرفه
(٢)	مكعب حجمه = ١٢٥سم^3 أوجد ١- المساحة الكلية ٢- المساحة الجانبية
(٣)	مكعب مساحة الوجه الواحد = ٤٩ سم^2 أوجد ١- طول حرف المكعب ٢- المساحة الجانبية ٣- المساحة الكلية ٤- حجم ٥- مجموع أطوال احرفه
(٤)	مكعب حجمه = ٦٤ سم^3 أوجد ١- طول حرف المكعب ٢- مساحة الوجه الواحد ٣- المساحة الجانبية ٤- المساحة الكلية ٥- مجموع أطوال احرفه
(٥)	مكعب مساحته الكلية ٢٤ سم^2 أوجد ١- طول حرفه ٢- حجمه ٣- مساحة كل وجه
(٦)	مكعب حجمه ١٢٥ سم^3 أوجد ١- المساحة الجانبية ٢- المساحة الكلية
(٧)	مكعب مجموع اطوال احرفه ٦٠ سم أوجد ١- حجمه ٢- المساحة الكلية
(٨)	مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم^2 أوجد المساحة الكلية ٢- حجمه
(٩)	مكعب محيط أحد اوجهه ١٢ سم أوجد ١- حجمه ٢- المساحة الجانبية ٣- مجموع أطوال احرفه

(١)	أسئلة مقالية متوازى مستطيلات أبعاده ٣سم ، ٤سم ، ٥سم أحسب ١- حجمه ٢- مساحة كلية ٣- مساحة جانبية
(٢)	متوازى مستطيلات ارتفاعه ٤سم وقاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٥سم أوجد ١- حجمه ٢- مساحة كلية ٣- مساحة جانبية
(٣)	متوازى مستطيلات أبعاده ٢سم ، ٣ سم ، ٦ سم أوجد حجمه
(٤)	متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل أبعاده فإذا كان حجمه ٧٢٠ سم^{٣} وارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية
(٥)	أيهما أكبر حجما مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ سم
(٦)	فى الشكل المقابل قطعه من الورق المقوى مستطيله الشكل بعداها ٢٥ سم ، ١٥سم قطع من كل ركن من أركانها الاربعه طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضا على شكل متوازى مستطيلات أوجد حجمه و مساحته الكلية ٢٥ ١٥سم

الدرس التاسع

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق فإن

١) محيط دائرة = ٢ π نق

٢) مساحة دائرة = π نق^{٢}

تمارين على الدائرة

(١) دائرة مساحتها ٥و٣٨ سم^{٢} أوجد محيطها $\frac{٢٢}{٧}$

الحل

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ٣٨,٥

$\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} = ٣٨,٥ بضرب الطرفين فى $\frac{٧}{٢٢}$

$\frac{٧}{٢٢}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} = ٣٨,٥ × $\frac{٢٢}{٧}$

نق^{٢} = ١٢,٢٥ بايجاد الجذر التربيعى للطرفين

نق = $\sqrt{١٢,٢٥}$ = ٣,٥ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ٢٢ سم

الكرة

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢}

تمارين على الكرة

(١) أوجد الحجم و مساحة سطح لكرة طول قطرها ٢, ٤ سم

الحل

نق = ٢, ٤ ÷ ٢ = ١, ٢ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١, ٢ × ١, ٢ × ١, ٢ = ٣٨, ٨٠٨ سم^{٣}

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^{٢} = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١, ٢ × ١, ٢ = ٤٤, ٥٥ سم^{٢}

كرة حجمها ٥, ٥٦٢ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها بدلالة π

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} = ٥, ٥٦٢ π بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٥, ٥٦٢ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٥, ٥٦٢ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = ٤٢١, ٨٧٥ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{٤٢١,٨٧٥}$ = ٧, ٥ سم

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^{٢} = ٤ × π × ٧, ٥ × ٧, ٥ = ٢٢٥ π سم^{٢}

أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^{٣}

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ π بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = $\frac{٢٧}{٨}$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ = $\frac{٣}{٢}$ سم

اسطوانة دائرية قائمة

مساحة جانبية = محيط قاعده × الارتفاع = ٢ π نق × ع

حجم قاعده = مساحة قاعده × الارتفاع = π نق^{٢} × ع

المساحة الكلية = مساحة جانبية + مساحة الدائرتان

محيط قاعده × ع + ٢ × مساحة الدائرة

٢ π نق × ع + ٢ π نق^{٢}

تمارين على الأسطوانة الدائرية القائمة

(١) إسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرقاعدتها ١٤سم و ارتفاعها ٢٠ سم أوجد حجمها و مساحتها الكلية

الحل

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع = π نق^{٢} × ع

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ × ٢٠ = ١٢٣٢٠ سم^{٣}

المساحة الجانبية للإسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق × ع

=٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ ×١٤×٢٠=١٧٦٠ سم^{٢}

المساحة الكلية للإسطوانة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ١٧٦٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ = ١٧٦٠ + ١٢٣٢ = ٢٩٩٢ سم^{٢}

(٢) أوجد المساحة الجانبية لاسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ل و ارتفاعها ع

الحل

نق = $\frac{ل}{٢}$

المساحة الجانبية للإسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع =٢ π نق × ع = ٢× π × $\frac{ل}{٢}$ × ع= π ل ع

(٣) إذا كان ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها أوجد ارتفاع الأسطوانة علماً بأن حجم الأسطوانة ٧٢ π سم^{٣}

الحل

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع = π نق^{٢} × ع = ٧٢ π بقسمة الطرفين على π

نق^{٢} × نق = ٧٢

نق^{٣} = ٧٢

نق = $\sqrt[٣]{٧٢}$ = $\sqrt[٣]{٨ \times ٩}$ = ٢ $\sqrt[٣]{٩}$ سم



تمارين على الدائرة و الأسطوانة الدائرية القائمة و الكرة(٩)

	<u>أسئلة مقالية على الدائرة</u>
(١)	دائرة مساحتها ٢٥ π سم٢ أحسب محيطها بدلالة π
(٢)	دائرة محيطها ٨٨ سم أوجد مساحته إذا كان $\pi = \frac{٢٢}{٧}$
(٣)	دائرة مساحتها ١٥٤ سم٢ أوجد محيطها وطول قطرها
(٤)	دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم أوجد كلا من محيطها ومساحتها $\pi = \frac{٢٢}{٧}$
(٥)	دائرة مساحتها ٦٤ π سم٢ أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها لاقرب عدد صحيح $\pi = ٣,١٤$
(٦)	دائرة مساحتها ٦١٦ سم٢ أوجد محيطها وطول قطرها
(٧)	<u>فى الشكل المقابل</u> $\overline{أب}$ قطر نصف دائرة فاذا كانت مساحة هذه منطقة ١٢,٣٢ سم٢ أوجد محيط الشكل (أ م ب)
(٨)	مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم٢ أوجد المساحة الكلية ٢- حجمه
(٩)	<u>فى الشكل المقابل</u> دائرتان متحدتان المركز فى م طولا نصفى قطريهما ٢ سم ، ٥ سم أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π (م)

أسئلة مقالية على الإسطوانة الدائرية القائمة

(١)	أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم ، وحجمها ١٥٤٠ سم^3 أوجد مساحته الكلية حيث $\pi = \frac{22}{7}$
(٢)	أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π، وارتفاعها ١٠ سم أوجد طول قطر قاعدتها
(٣)	أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٢٠سم أوجد حجمها ومساحتها الكلية حيث $\pi = \frac{22}{7}$
(٤)	أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤سم٣ ، وارتفاعها ٦ سم أوجد مساحته الجانبية $\pi = \frac{22}{7}$
(٥)	أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم٣ ، ثم ارتفاعها ٢٤ سم أوجد مساحته الكلية $\pi = 3,14$
(٦)	أيهما أكبر حجما أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم أم مكعب طول حرفه ١١ سم علما بأن $\pi = \frac{22}{7}$
(٧)	إذا كان ارتفاع إسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطرها أوجد ارتفاع الاسطوانة علما بأن حجمها ٧٢ π
(٨)	أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٤ $\sqrt{2}$سم وارتفاعها ٩ سم بدلالة π
(٩)	إسطوانة طول نصف قطرقاعدتها هو ٤ سم وارتفاعها ٩ سم أوجد حجم الاسطوانة بدلالة π
(١٠)	إذا كان ارتفاع إسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها أوجد ارتفاع الاسطوانة علما بأن حجمها ٢٧ π سم^3
(١١)	إسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٢ π سم^3 وارتفاعها ٨ سم أوجد مساحة الجانبية بدلالة π

	أسئلة مقالية على الكرة
(١)	كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}\pi$ سم^{٣} أوجد طول قطرها
(٢)	كرة مساحتها ٣٦ π سم^{٣} أوجد حجمها بدلالة π
(٣)	كرة حجمها ٤١٨٨ سم^{٣} أوجد طول نصف قطرها حيث π = ٣,١٤
(٤)	كرة حجمها ٥٦٢,٥π أوجد مساحة سطحهما بدلالة π
(٥)	حجم الكرة التى طول قطرها ٩ سم = ... سم^{٣}
(٦)	إذا كان حجم الكرة $\frac{٩}{١٦}\pi$ أوجد طول نصف قطرها
(٧)	كرة حجمها $\frac{٤}{٣}\pi$ أوجد طول قطرها
(٨)	متوازى مستطيلات مصنوع من الرصاص أطول احرفه ٧٧ سم^{٢} ، ٢٤ سم ، ٢١سم شكلت منه مادة لتكوين كره أوجد طول نصف قطرها
(٩)	كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وضعت داخل مكعب ضمت أوجه المكعب السته أوجد ١- طول نصف قطر الكره ٢- حجم مكعب
(١٠)	كره من المعدن نصف قطرها ٣ سم صهرت وتحولت الى اسطوانه طول نصف قاعدتها ٣ سم أحسب ارتفاع الاسطوانة
(١١)	كره حجمها $\frac{٣٢}{٣}\pi$ سم^{٣} أوجد طول نصف قطر الكرة

الدرس العاشر

حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات و المتباينات الآتية فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

(١)

$س^٣ - ٢ = ٦$ بإضافة +٢ للطرفين

الحل

$س^٣ - ٢ + ٢ = ٦ + ٢$

$س^٣ = ٨$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

$س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$ م.ح فى ح = $\{ ٢ \}$

-٤ -٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

(٢)

$س + ١ = \sqrt{٣}$ بإضافة - ١ للطرفين

الحل

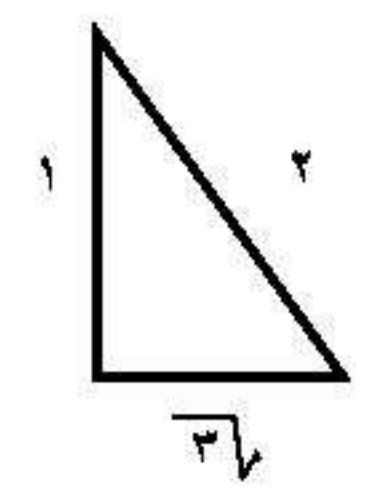
$س + ١ - ١ = \sqrt{٣} - ١$

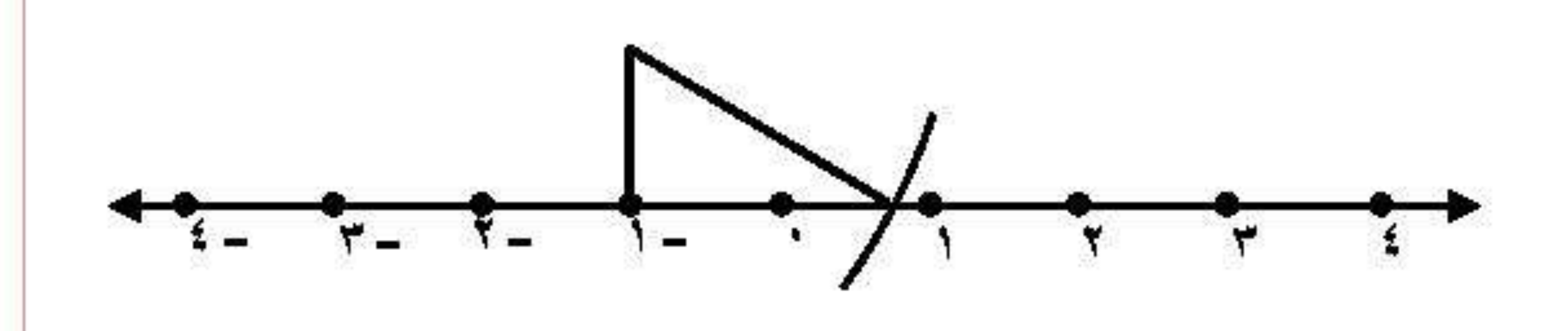
$س = \sqrt{٣} - ١$

م.ح فى ح = $\{ \sqrt{٣} - ١ \}$

طول الوتر = $\frac{٣ + ١}{٢} = ٢$

طول ضلع القائمة = $\frac{٣ - ١}{٢} = ١$





(٣) س – ١ ⩾ ٥ حيث س ∈ ط

الحل

س – ١ ⩾ ٥ بإضافة +١ للطرفين

س – ١ +١ ⩾ ٥+١

س ⩾ ٦

م.ح فى ح = [٦ ، -∞[

-∞ ، ∞ ، ٦

(٤) ٢س +٣ > ٧ حيث س ∈ ص

الحل

٢س +٣ > ٧ بإضافة – ٣ للطرفين

٢س +٣ – ٣ > ٧ – ٣

٢س > ٤

$\frac{٢س}{٢} > \frac{٤}{٢}$

س > ٢

م.ح فى ح =]٢ ، -∞[

-∞ ، ∞ ، ٢

(٥) ٧ - ٥س ⩾ ٢ حيث س ∈ ن

الحل

٧ - ٥س ⩾ ٢ بإضافة - ٧ للطرفين

٧ - ٥س – ٧ ⩾ ٢ - ٧

- ٥س ⩾ - ٥ بقسمة الطرفين على - ٥

$\frac{-٥س}{-٥} \leq \frac{-٥}{-٥}$

س ⩽ ١

س =]∞ ,١]

-∞ ، ∞ ، ١

تمارين على حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح (١٠)

أوجد فى ح مجموعة الحل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الإعداد

(١)	س + ٥ = ٠	(١)	٢س + ٤ = ٣
(٢)	٤س − ١ = |−٢|	(٢)	س − ١ = √٣
(٣)	٥س + ٦ = ١	(٣)	٢س − ٣ = ٧
(٤)	√٥س − ١ = ٤	(٤)	٢ − √٦س = |−٨|

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الإعداد

(١)	٢س > ٦	(١)	٢ − س > ١
(٢)	٢س + ٥ ≥ ٣	(٢)	١ − ٥س < ٦
(٣)	−٧س ≥ −١٤	(٣)	٤س + ١ ≤ ٣س + ٢
(٤)	٥ − س > ٣	(٤)	٣ − ٢س ≤ ٧

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية

(١)	٣ < س + ٢ ≤ ٦	(١)	س − ١ ≤ ٣ − س
(٢)	|−٣| < ٢س − ١ < ٥	(٢)	∛(−٨) ≤ س + ١ < √٩
(٣)	−٥ < س + ٣ < ٩	(٣)	١ − س ≥ −٢س − ٣
(٤)	٠ ≤ (−٢س + ٦) / ٣ < ٤	(٤)	٥ < ٣ − س ≤ ٣^٢
(٥)	−٣ ≤ −س < ٣	(٥)	٤س ≤ ٥س + ٢ ≤ ٤س + ٣
(٦)	٧س − ١٢ ≥ ٥س − ٨	(٦)	−٨ ≤ ٣س + ١ ≤ ٤
(٧)	١ < ٥ − س ≤ ٣	(٧)	(٣س − ٤) / ٦ < س + ١ < (س + ٣) / ٢

(١) أكمل ما يأتى

(١)	إذا كان س − ٧ ≤ ٠ فإن س	(١)	إذا كان س − ٣ ≤ ٠ فإن س ....
(٢)	−٢س > ١٤ فإن س	(٢)	٥س > ١٥ فإن س ....
(٣)	إذا كان ١ − س < ٤ فإن س	(٣)	إذا كان ١ − س < ٤ فإن س ....
(٤)	إذا كان −٥س ≥ ٤ فإن س	(٤)	إذا كان −٢س ≥ ٣ فإن س ....
(٥)	√٣ س ≤ ٣ فإن س	(٥)	√٢ س ≤ ٤ فإن س ....
(٦)	مجموعة حل المتباينة ٤ > ٢س ≥ ٨ فى ح هى	(٦)	مجموعة حل المتباينة ١٢ > ٤س ≥ ٤٠ فى ح هى ....
(٧)	مجموعة حل المتباينة ٥ − س > −٤ فى ح هى	(٧)	مجموعة حل المتباينة ٢ − س > −٥ فى ح هى ....
(٨)	إذا كان −٣ > س > ٣ حيث س ∈ ع فأن ٢س ∈	(٨)	إذا كان −٢ > س > ٥ حيث س ∈ ع فأن ٢س ∈ ....
(٩)	مجموعة حل المتباينة س + ٣ > ٣ فى ح هى	(٩)	مجموعة حل المتباينة س − ٣ > ٣ فى ح هى ....
(١٠)	مجموعة حل المتباينة ١ < س − ٥ < −١ فى ح هى	(١٠)	مجموعة حل المتباينة ٢ < س − ٥ < −٤ فى ح هى ....

الدرس الأول

العلاقة بين متغيرين

ٱ س + ب ص = جـ   حيث ٱ ≠ صفر , ب ≠ صفر تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س , ص

أمثلة

(١)	إذا كان الزوج المرتب (٢ , ٦) يحقق العلاقة ص = ب س احسب قيمة ب **الحل** ∵ ص = ب س ∴ ٦ = ب × ٢ بقسمة الطرفين على ٢ $\frac{٦}{٢} = \frac{ب}{٢}$ ∴ ب = ٣
(٢)	إذا كان الزوج المرتب (١ , ٢) يحقق العلاقة ص = س + ٱ احسب قيمة ٱ **الحل** ∵ ص = س + ٱ ∴ ٢ = ١ + ٱ ∴ ٱ = ٢ - ١ ∴ ٱ = ١
(٣)	إذا كان الزوج المرتب (٣ , - ٤) يحقق العلاقة ص + ٢ س = ب احسب قيمة ب **الحل** ∵ ص + ٢ س = ب ∴ - ٤ + ٢ × ٣ = ب ∴ - ٤ + ٦ = ب ∴ ب = ٢
(٤)	إذا كان الزوج المرتب (جـ , ٤) يحقق العلاقة ٣ س – ٢ ص = ١٠ احسب قيمة جـ **الحل** ∵ ٣ س – ٢ ص = ١٠ ∴ ٣ ×جـ – ٢ × ٤ = ١٠ ∴ ٣جـ – ٨ = ١٠ ∴ ٣جـ = ١٠ + ٨ ∴ ٣جـ = ١٨ ÷ ٣ ∴ جـ = ٦

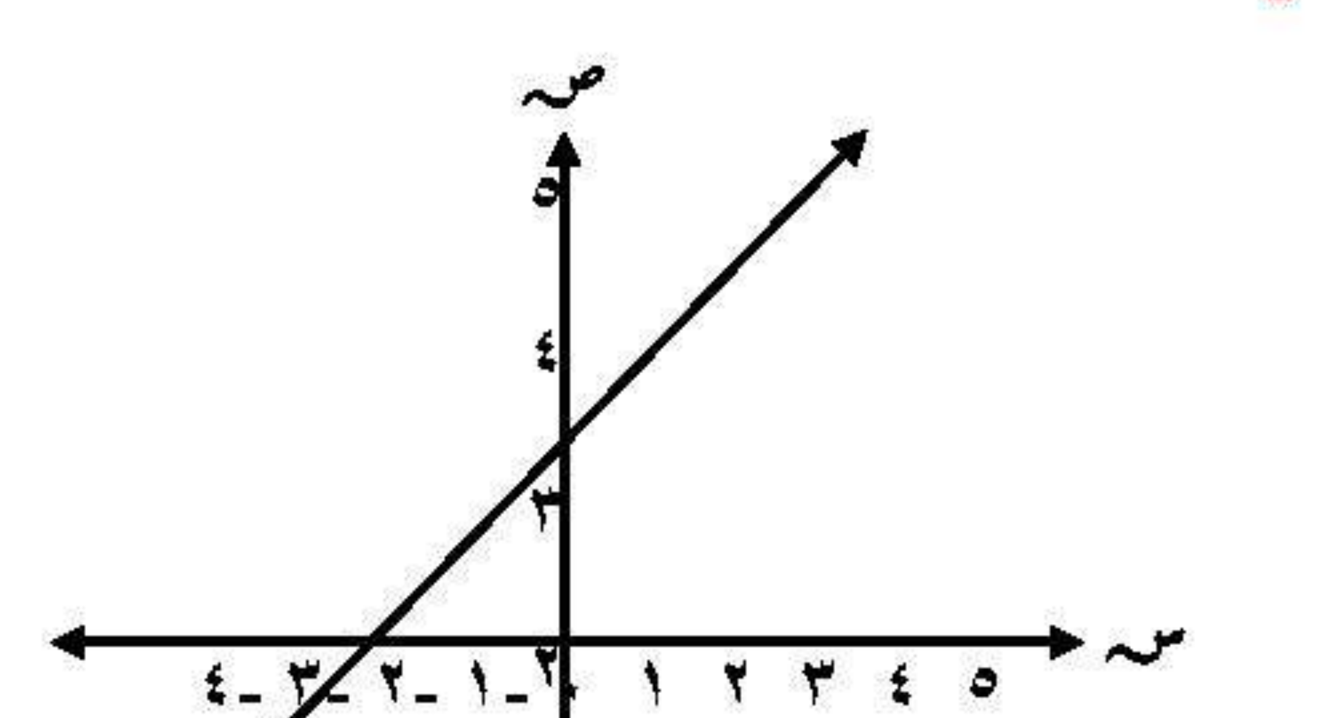
(٥) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
ص = س + ٢ و مثلها بيانياً

الحل

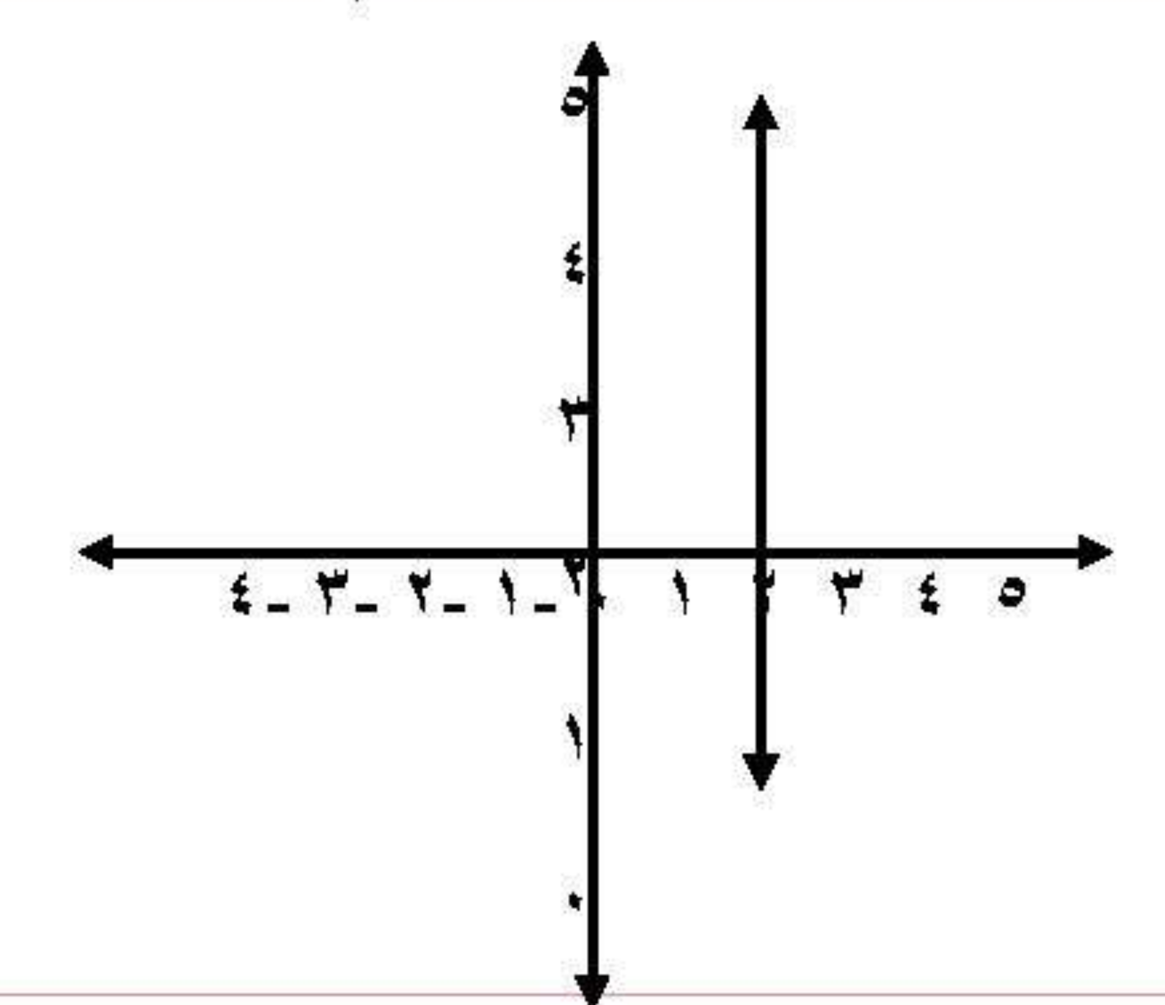
بفرض س = ٠
ص = (٠) + ٢ = ٢ (٠ , ٢)

بفرض س = ١
ص = (١) + ٢ = ٣ (١ , ٣)

بفرض س = ٢
ص = (٢) + ٢ = ٤ (٢ , ٤)



(٦) مثل بيانياً س = ٢



(٧) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
س +٢ ص = ٤ و مثلها بيانياً

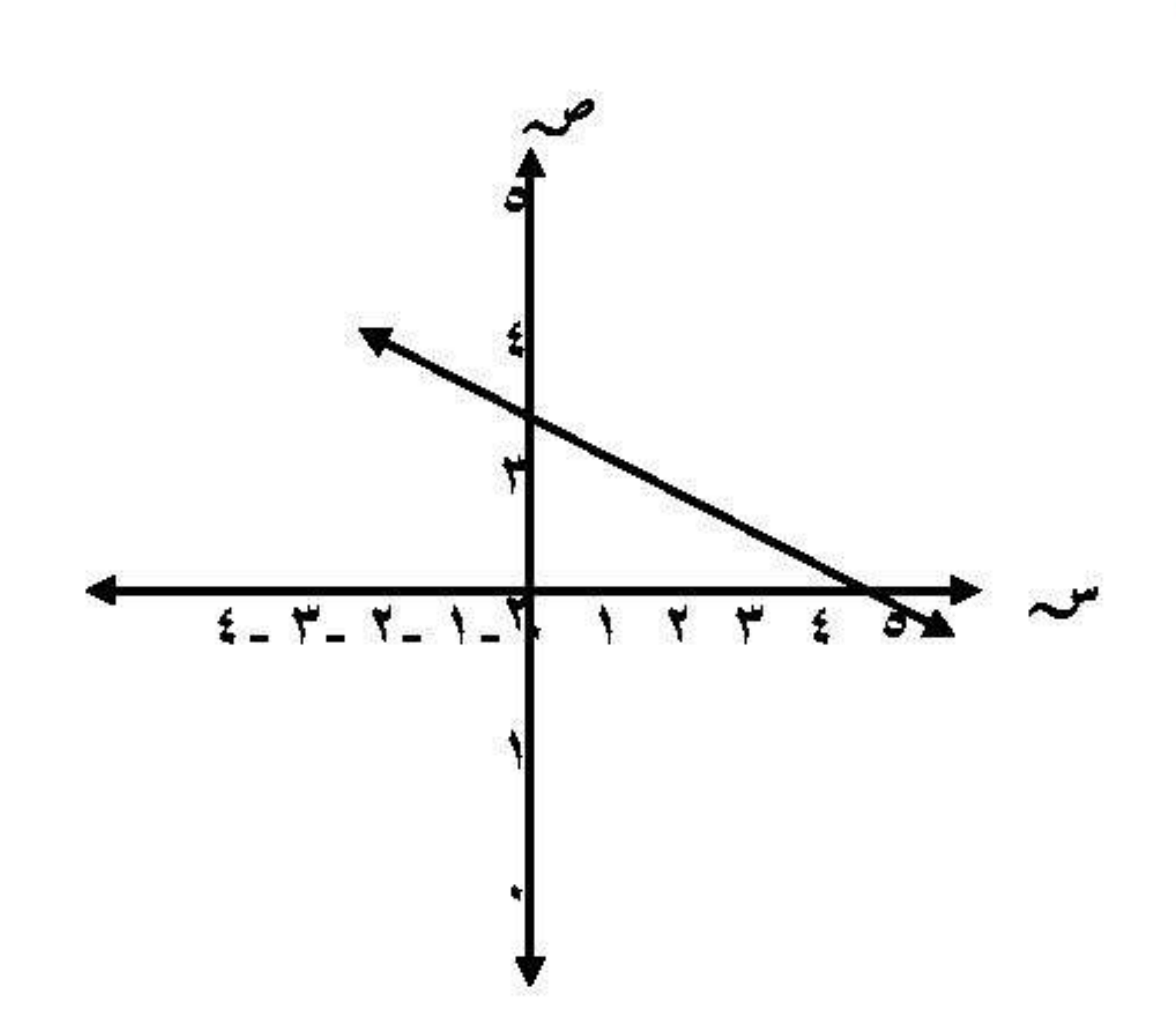
الحل

س + ٢ص = ٤
س = ٤ - ٢ص

بفرض ص = ٠
س = ٤ - ٢× (٠) = ٤ (٤ , ٠)

بفرض ص = ١
س = ٤ - ٢× (١) = ٢ (٢ , ١)

بفرض ص = ٢
س = ٤ - ٢× (٢) = ٠ (٠ , ٢)



(٨)

أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للمعادلة
٣ س + ٢ص = ١٢ مع محورى الإحداثيات

الحل

أولاً
المستقيم يقطع محور السينات عند ص = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ س +٢ × (صفر) = ١٢
٣ س = ١٢ ÷ ٣
س = ٤
نقطة التقاطع مع محور السينات (٤ ، ٠)

ثانياً
المستقيم يقطع محور الصادات عند س = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ × (صفر) + ٢ ص = ١٢
٢ ص = ١٢ ÷ ٢
ص = ٦
نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٦)

تمارين على العلاقة بين متغيرين (١١)

أوجد (٣) أزواج مرتبة تحقق كلا من العلاقات الاتية

(١)	٣س + ص = ٥	(١)	ص = ½ س + ٥
(٢)	٣س + ص = ٢	(٢)	ص = −٢
(٣)	٣س − ٢ص = ٦	(٣)	ص = ٢
(٤)	٢س − ص = ٥	(٤)	٢س − ص = ١
(٥)	٣س = ٦	(٥)	٢س = ٥

مثل بيانيا كلا من العلاقات الآتية

(١)	س + ص = ٥	(١)	س + ٢ص = ٤
(٢)	ص = −٢س	(٢)	٢س = ٥
(٣)	س − ص = ٢	(٣)	ص − ٣س = ١
(٤)	س − ٢ص + ١ = ٠	(٤)	ص + ١ = ٠

أختر الإجابة الصحيحة

(١)	إذا كان (٢، −٥) يحقق العلاقة ٣ص − س + أ = ١٠ أوجد قيمة أ (٢٧، ١٧، ٢٥، ١٥)	(١)	أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة ٢س + ص = ٥ ((−١، ٣)، (١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢))
(٢)	إذا كان (−١، ٥) يحقق العلاقة ٣س + ك ص = ٧ فإن ك = ... (٢، −٢، ١، ١٠)	(٢)	العلاقة ٣س + ٨ص = ٢٤ يمثلها مستقيم يقطع محور صادات فى النقطة ((٠، ٨)، (٨، ٠)، (٠، ٣)، (٣، ٠))

(١)	إذا كانت س − ٢س = ١ أوجد ١- ص عندما س = ٣ ٢- ص عندما س = −٥ ٣- س عندما ص = ١ ٤- س عندما ص = −١
(٢)	مثل بيانيا المستقيم الذى يمثل العلاقة ٢س + ٣ص = ٦ وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويطع محور الصادات فى النقطة ب أوجد مساحة لمثلث و أ ب حيث نقطة و هى نقطة الاصل
(٣)	إذا كان (٣،٦) يحقق العلاقة ص = ك س أوجد قيمة ك
(٤)	إذا كان (٢،١) يحقق العلاقة ص = م س أوجد قيمة م
(٥)	(٣،١) يحقق العلاقة ص − ٣س = أ أوجد قيمة أ
(٦)	إذا كان (ل،٣ل) يحقق العلاقة س + ص = ١٦ أوجد قيمة ل
(٧)	إذا كان (ك،٢ك) يحقق العلاقة س + ص = ١٥ أوجد قيمة ك
(٨)	إذا كان (٣،أ) يحقق العلاقة س − ٢س = ٤ أوجد قيمة أ
(٩)	إذا كان (−٣،٢) يحقق العلاقة ٣س+ب ص = ١٦ أوجد قيمة أ
(١٠)	إذا كان (٢،٣) يحقق العلاقة ٢س+ب ص = ١٦ أوجد قيمة ب
(١١)	إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة ٢س − ص = أ يقطع محور السينات فى النقطة (٣،ب) أوجد قيمة كلا من أ ، ب

الدرس الثانى

ميل الخط المستقيم

ميل = $\frac{\text{التغير فى الاحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الاحداثى السينى}}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$ = $\frac{\text{فرق صادات}}{\text{فرق سينات}}$

ملاحظات هامة

(١) ميل محور السينات يساوى صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى يوازى السينات يساوى صفر

(٣) ميل محور الصادات غير معرف

(٤) ميل أى مستقيم رأسى يوازى الصادات غير معرف

(٥) إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية موجبة

(٦) إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية سالبة

أمثلة

(١)	أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، -١) , (٣ ، ٥) الحل الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - (-١)}{٣ - (-٤)} = \frac{٥ + ١}{٣ + ٤} = \frac{٦}{٧}$
(٢)	أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) , (٣ ، ٤) الحل الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ١}{٣ - ٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

(٣) اثبت أن النقاط ٩ (١ ، ١)، ب (٢ ، ٣)، جـ (٣ ، ٥) تقع على استقامة واحدة

الحل

$$\text{ميل ٩ب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$$

$$\text{ميل ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٣ - ٢} = \frac{٢}{١} = ٢$$

∵ ميل ٩ب = ميل ب جـ

∴ ٩ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

(٤) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س (م ، ٥)، ص (٢ ، ٣) ميله = $\frac{٧}{٢}$ أوجد قيمة م

الحل

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٥}{٢ - م} = \frac{-٢}{٢ - م} = \frac{٢}{٧}$$

٤ − ٢م = −١٤ بإضافة −٤ للطرفين

٤ − ٢م − ٤ = −١٤ − ٤

−٢م = −١٨ بالقسمة على −٢

م = ٩

(٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين

س (٣ ، ٧)، ص (٥ ، ك) يوازى محور السينات احسب قيمة ك

الحل

∵ المستقيم يوازى محور السينات

∴ الميل = صفر

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ك - ٧}{٥ - ٣} = \frac{ك - ٧}{٢} = \frac{٠}{٢}$$

ك − ٧ = صفر ك = ٧

(٦)

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين

س (٥ ، ١), ص (ك ، ٩) يوازى محور الصادات احسب قيمة ك

الحل

∵ المستقيم يوازى محور الصادات

∴ الميل غير معرف

الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ١}{ك - ٥} = \frac{٨}{ك - ٥} = \frac{٨}{٠}$

ك - ٥ = صفر   ك = ٥

(٧)

إذا كانت النقاط أ (١ , ك), ب (- ١ , ٥) , جـ (٢ , - ٣) تقع على استقامة واحدة احسب قيمة ك

الحل

ميل ب جـ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - ٥}{٢ - (-١)} = \frac{-٨}{٣}$

ميل أ ب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ك}{-١ - ١} = \frac{٥ - ك}{-٢}$

∵ أ , ب , جـ تقع على استقامة واحدة

∴ ميل أ ب = ميل ب جـ

$\frac{٥ - ك}{-٢} = \frac{-٨}{٣}$

١٥ - ٣ك = ١٦   بإضافة - ١٥ للطرفين

١٥ - ٣ك - ١٥ = ١٦ - ١٥

-٣ك = ١   بالقسمة على -٣

ك $= \frac{-١}{٣}$

تمارين على ميل الخط المستقيم (١٢)

أكمل

(١)	ميل أى مستقيم يوازى على محور سينات = ...	(١)	ميل أى مستقيم رأسى ....
(٢)	ميل أى مستقيم عمودى على محور صادات = ...	(٢)	المستقيم الذى ميله = صفر يكون موازيا لمحور ....
(٣)	ميل أى مستقيم أفقى=	(٣)	المستقيم الذى ميله غير معرف يكون موازيا لمحور ....
(٤)	ميل أى مستقيم يوازى محور صادات = ...	(٤)	المستقيم الذى ميله عمودي على محور صادات.............
(٥)	ميل أى مستقيم عمودى على محور سينات = ...	(٥)	المستقيم الذى ميله عمودي على محور سينات.............

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتى

(١)	أ (١،٣) ب (٣،٤)	(١)	أ (–١،٣) ب (٢،١)
(٢)	أ (٥،٦) ب (٣،٨)	(٢)	أ (٤،–٢) ب (–١، –٧)
(٣)	أ (١،٢) ب (٥،٠)	(٣)	أ (–٦،–٩) ب (–١، –١)
(٤)	أ (٣،١) ب (٣،٦)	(٤)	أ (–٢،٣) ب (٢،٣)

(١)	فى كل مما يأتى أثبت أن ابجـ تقع على استقامة واحدة ١) أ (١،١) ب (٢،٢) جـ (–٣،–٣) أ (٤،–٣) ب (–٦،٧) جـ (٥،–٤) أ (–٢،١٢) ب (٢،٤) جـ (٦،–٤)

(٢)	فى كل مما يأتى أثبت أن ‍أ‍ب‍ج لا تقع على استقامة واحدة ١) أ (٢، ١) ب (٣، ٠) جـ (٥، - ١) ٢) أ (-١، ٢) ب (٣، ١) جـ (٧، ٢) ٣) أ (٠، -٣) ب (٢، ٢) جـ (-٣، -٣)
(٣)	إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١، ٣)،(٣، ل) = ٣ أوجد قيمة ل
(٤)	إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١، ل) ، (-٣، ٤) = ٢ أوجد قيمة ل
(٥)	إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين أ (-١، ٤) ب (س، ٢) وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = -٢ أوجد قيمة س
(٦)	إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٢، ص) ، (٣، - ١) ميله = -٦، ٠ أوجد قيمة ص
(٧)	أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤) ، (٢، ك) موازيا لمحور سينات
(٨)	أوجد قيمة ص بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٦) ، (-٢، ٣ص) عموديا على محور صادات
(٩)	أوجد قيمة س بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٢س، ٣)،(٦، ٧) موازيا لمحور صادات

الدرس الثالث

تطبيقات على ميل الخط المستقيم

(١)

خزان مياه مملوء بأسفله صنبور مفتوح والشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالدقائق وكمية المياه المتبقية فى الخزان (ح) باللترات

(١) ماهى أكبر سعة للخزان ؟

(٢) ماهو الزمن اللازم ليفرغ الخزان

(٣) كم يتبقى فى الخزان بعد ٢٠ دقيقة ؟

(٤) ماهو متوسط تفريغ الخزان ؟

حجم اللترات
٨٠٠
٧٥٠
٥٠٠
٢٥٠
١٠٠
(١٠،٥٠٠)
(١٠،٢٥٠)
الزمن بالدقائق
٠ ٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠

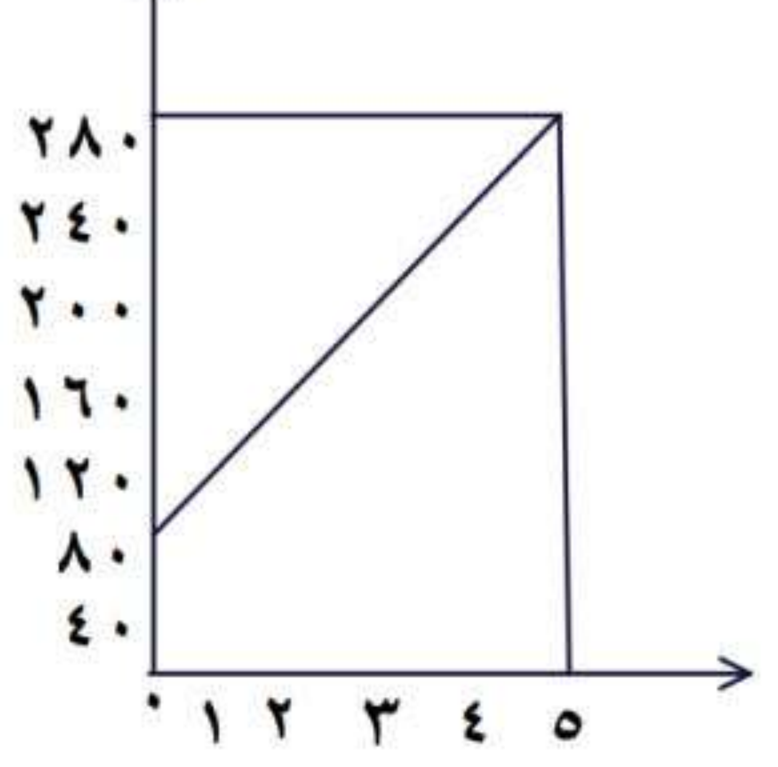
(٢)

الشكل المقابل يمثل حركة سيارة



(١) عين السرعة المنتظمة للسيارة

(٢)احسب المسافة المقطوعة بعد مرور ساعتين عن بدء الحركة



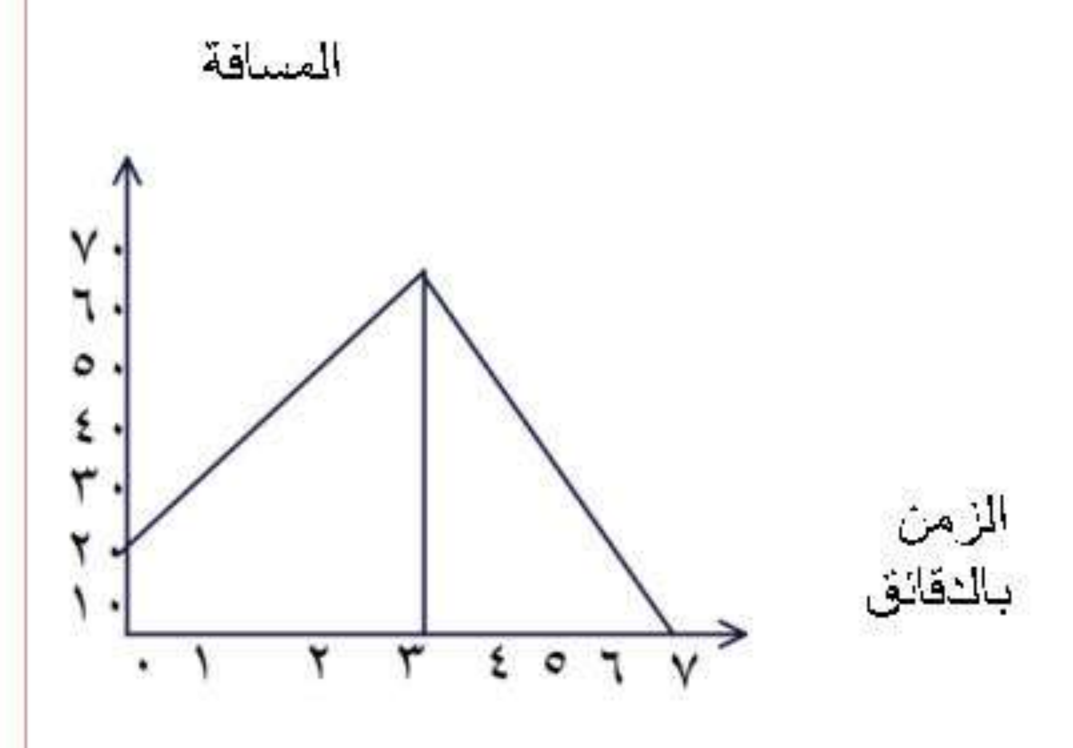
(٣)

الشكل المقابل يمثل حركة دراجة أوجد

(١) أوجد السرعة المنتظمة للدراجة خلال الثلاث ساعات الأولى

(٢) أوجد السرعة المنتظمة للدراجة خلال الثلاث ساعات الأولى

(٣) هل عادت الدراجة الى نقطة البداية



الدرس الأول

جمع البيانات و تنظيمها

(١)

فيما يلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالبا فى احد الاختبارات و كانت الدرجة النهائية من ٢٠ درجة

١٤	٨	٩	٨	١٧	١٦
١٣	٨	١٥	١٢	٢	٧
١٣	١١	١٩	١٥	١٢	١٠
٥	٧	٥	١٦	١٩	٤
٦	١٧	١٣	٣	١٢	٩

المطلوب تكوين جدول تكرارى ذى مجموعات لهذه البيانات

الحل

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ١٩ – ٢ = ١٧

عدد المجموعات = ٦ ، طول المجموعة = $\frac{١٧}{٦} \simeq ٣$

المجموعة	العلامات	التكرار
-٢	///	٣
-٥	~~////~~	٥
-٨	~~////~~ /	٦
-١١	~~////~~ //	٧
-١٤	~~////~~	٥
-١٧	////	٤

المجموعات	-٢	-٥	-٨	-١١	-١٤	-١٧	المجموع
التكرار	٣	٥	٦	٧	٥	٤	٣٠

الدرس الثانى

الجدول التكرارى الصاعد و النازل

(١)

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و أرسم المنحنى

المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٥	٣	٢	٤٠

الحل

الجدول التكرارى الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار الصاعد
أقل من ٢	٠
أقل من ٦	٠ + ٤ = ٤
أقل من ١٠	٤ + ٦ = ١٠
أقل من ١٤	١٠ + ١٠ = ٢٠
أقل من ١٨	٢٠ + ١٥ = ٣٥
أقل من ٢٢	٣٥ + ٣ = ٣٨
أقل من ٢٦	٣٨ + ٢ = ٤٠

المنحنى التكرارى الصاعد



(٢)

كون الجدول التكرارى المتجمع النازل و أرسم المنحنى

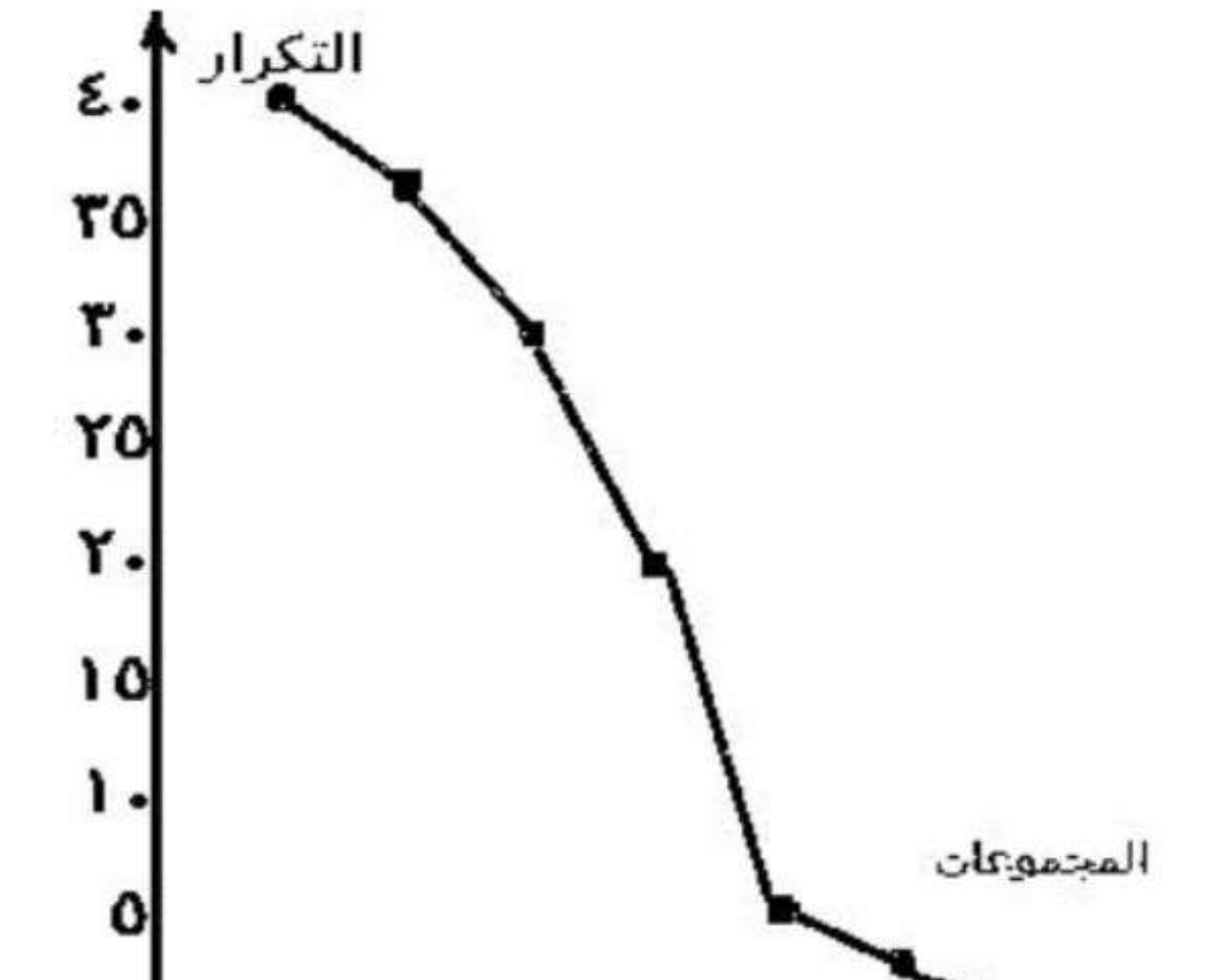
المجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٥	٣	٢	٤٠

الحل

الجدول التكرارى النازل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار الصاعد
٢ فأكثر	٣٦ + ٤ = ٤٠
٦ فأكثر	٣٠ + ٦ = ٣٦
١٠ فأكثر	٢٠ + ١٠ = ٣٠
١٤ فأكثر	٥ + ١٥ = ٢٠
١٨ فأكثر	٢ + ٣ = ٥
٢٢ فأكثر	٠ + ٢ = ٢
٢٦ فأكثر	٠

المنحنى التكرارى النازل





تمارين الجدول التكرارى الصاعد و النازل (١٤)

(١) الجدول التكرارى التالى يبين الأجر اليومى بالجنية لعدد ٥٠ عاملا فى أحد المصانع

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانى ثم أوجد

١) أوجد عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيها

٢) النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيها

مجموعات الاجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	مجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

(٢) الجدول التكرارى التالى يبين الأجر اليومى بالجنية لعدد ٥٠٠ عاملا فى أحد المصانع

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ومثله بيانى

١) أوجد عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيها

٢) النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيها

مجموعات الاجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	مجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

(٣) الجدول التكرارى التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى أحد الاختبارات

مجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	مجموع
(التكرار)	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع

(٤) الجدول التكرارى التالى يمثل درجات ٦٠ طالبا فى مادة الرياضيات

مجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	مجموع
(التكرار)	٩	١١	١٣	١٧	١٠	٦٠

ارسم المنجنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع واذا كانت درجة النجاح هى ٣٠

فما هو عدد الطلبة الراسبين

(٥) الجدول الاتى يبين التوزيع التكرارى للأجر اليومى لمجموعة من العمال

مجموعات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	مجموع
(التكرار)	١٠	١٤	٢٤	٣٠	١٢	١٠	١٠٠

المطلوب ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع

الدرس الثالث

الوسط

الوسط

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

(١) إذا كان درجات ٥ طلاب هى ٢٥،٢٣،٢١،٢٢،٢٤

فإن الوسط = $\frac{\text{مجموعهم}}{\text{عددهم}}$ = $\frac{٢٥+٢٣+٢١+٢٢+٢٤}{٥}$ = ٢٣ درجة

(٢) إيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

مجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	مجموع
(التكرار)	٨	١٢	١٤	٩	٧	١٠٠

مركز مجموعة م = $\frac{\text{الحد الادنى + الحد الاعلى}}{٢}$

مجموعة	مركزمجموعة(م)	تكرار(ك)	م × ك
-١٠	١٥	٨	١٢٠
-٢٠	٢٥	١٢	٣٠٠
-٣٠	٣٥	١٤	٤٩٠
-٤٠	٤٥	٩	٤٠٥
-٥٠	٥٥	٧	٣٨٥
مجموع		٥٠	١٧٠٠

الوسط = $\frac{\text{مجموع م × ك}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{١٧٠٠}{٥٠}$ = ٣٤ درجة

(٣) أوجد الوسط الحسابى لمجموعة القيم

٥+أ , ٨ , ٦ , ٢, ٩-أ

فإن الوسط = $\frac{\text{مجموعهم}}{\text{عددهم}}$ = $\frac{٥+أ+٨+٦+٢+٩-أ}{٥}$ = ٦

إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم

٨ , ٦ , ٩ , ك = ٧

مجموع القيم = الوسط الحسابى × عدد القيم = ٧ × ٤ = ٢٨

ك = ٢٨- (٨ + ٦ + ٩) = ٥

تمارين على الوسط الحسابى (١٥)

أكمل

(١)	المدى لمجموعة القيم ٥، ١٠، ٣، ٢٠، ٢٠ هو	(١)	إذا كان الحد الاعلى لمجموعة هو ١٤ ومركزها هو ١٠ فإن الحد الادنى لها ....
(٢)	الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{..............}{..............}$	(٢)	مجموعة حدها الأدنى ٦ والاعلى ١٠ فأن مركزها = ...
(٣)	الوسط الحسابى القيم ٥، ٦، ١١، ٢ هو	(٣)	مجموعة حدها الادنى = ٥ ومركزها = ٨ فإن حدها الأعلى = ...
(٤)	إذا كان الحد الادنى لمجموعة هو ٥ والحد الأعلى ١٥ فإن مركز مجموعة =.........	(٤)	مركز المجموعة الاولى من المجموعات ٧-، ١٣-، ١٩-، ٣٥- هو ....
(٥)	إذا كان الحد الادنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدها الاعلى = ...	(٥)	الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥فإن س =.....
(٦)	إذا كان الحد الادنى لمجموعة ٤ وحدها الاعلى ١٢ فإن مركزها = ...	(٦)	إذا كان الحد الادنى لمجموعة ٤ وحدها الاعلى ١٢ فإن مركزها = ...

(١) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الأتى :

مجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	مجموع
(التكرار)	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

(٢) س٣ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الأتى :

مجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	مجموع
(التكرار)	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

(٣) أوجد التالى يوضح لتوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالب

أوجد قيمة ك والوسط الحسابى

مجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	مجموع
(التكرار)	٨	١٢	٣	٨ ك	ك	٥٠

(٤) أوجد الوسط الحسابى مستعينا بالجدول الأتى واوجد قيمة ك

مجموعات	-٨	-١٢	-١٦	-٢٠	-٢٤	مجموع
(التكرار)	٤	ك	١٦	١٢	٨	٥٠

(٥) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى إمتحان

مجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	مجموع
(التكرار)	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لدرجات الطلاب

الدرس الرابع الوسيط

الوسيط

هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا بحيث يكون عدد القيم الأصغر مساويا لعدد القيم الأكبر منها

أوجد الوسيط

(١)	٢٠،٣٠،١٧،٢٣،٤٢ ترتيب القيم تصاعديا او تنازليا ترتيب ١٧،٢٠،٢٣،٣٠،٤٢ ∴ الوسيط هو ٢٣
(٢)	٢١،٢٣،٢٤،٢٣،١٣،٢٧ ترتيب ١٣،٢١،٢٣،٢٣،٢٤،٢٧ عدد القيم زوجى الوسيط = $\frac{\text{مجموع القيم التى تقعان فى الوسط}}{٢}$ = $\frac{٢٣ + ٢٣}{٢}$ = ٢٣
(٣)	٢١،١٣،٢٤،٢٣،١٣،٢٧ ترتيب ١٣،١٣،٢١،٢٣،٢٤،٢٧ الوسيط = $\frac{٢٣+٢١}{٢}$ = ٢٢

ملحوظة

١) نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له

٢) توجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

٣) نعين النقطة التى تمثل ترتيب الوسيط على المحور الرأسى ونرسم منها مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة عمود أعلى المحمور الافقى يقطع فى نقطة تمثل الوسيط

(١)

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد
و الجدول التكرارى المتجمع النازل ثم أوجد الوسيط

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٢	١	٢	٣	٤	١٢

الحل

التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	ك
أقل من ١٠	صفر
أقل من ٢٠	٢
أقل من ٣٠	٣
أقل من ٤٠	٥
أقل من ٥٠	٨
أقل من ٦٠	١٢

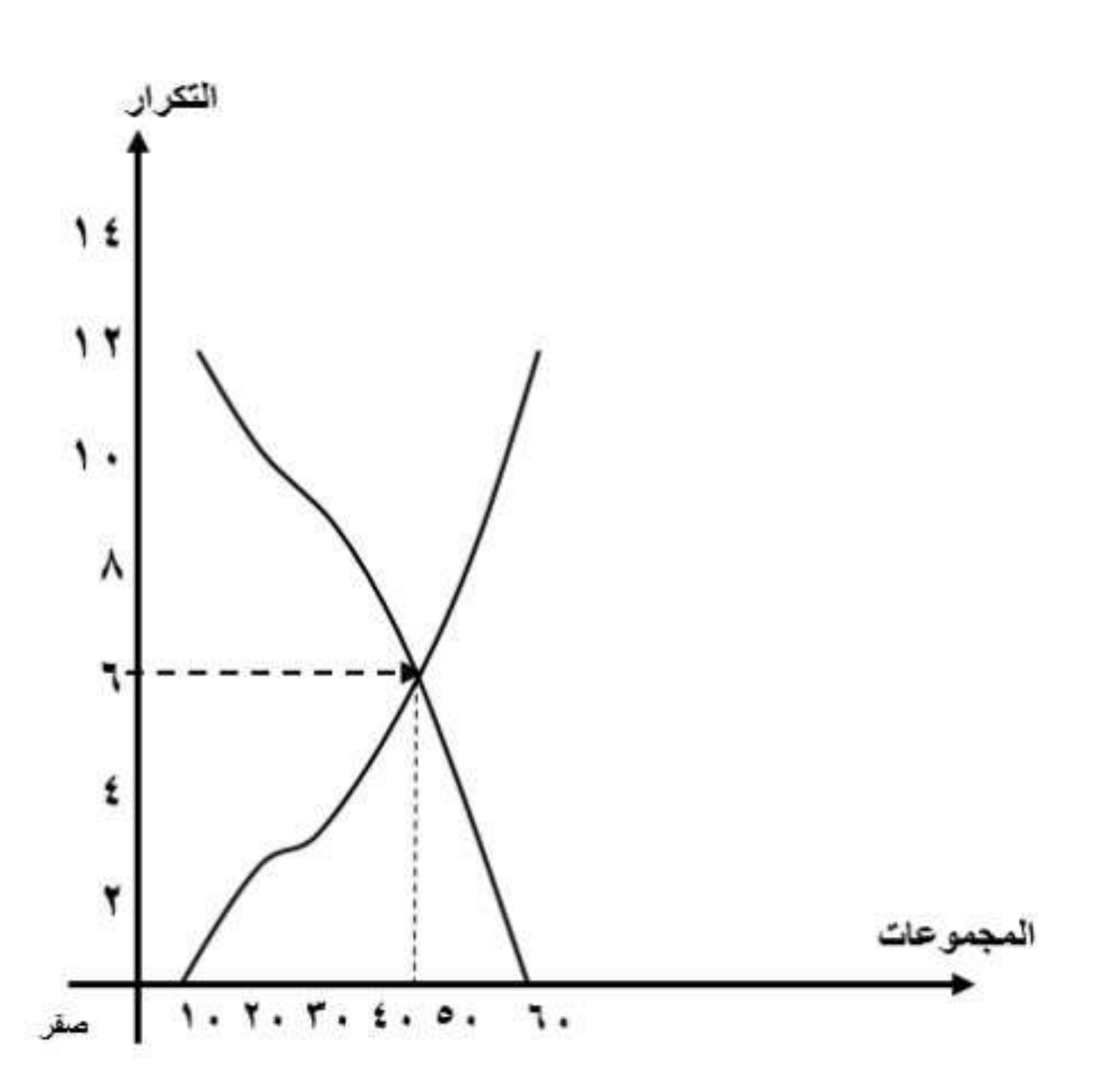
ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مج ك}}{٢}$ =

$\frac{١٢}{٢} = ٦$

الوسيط $\simeq$ ٤٤

لتكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	ك
١٠ فأكثر	١٢
٢٠ فأكثر	١٠
٣٠ فأكثر	٩
٤٠ فأكثر	٧
٥٠ فأكثر	٤
٦٠ فأكثر	صفر



تمارين على الوسيط (١٦)

أكمل

(١)	الوسيط لمجموعة القيم ٩، ٤، ٨، ١، ٣ هو	(١)	إذا كان الوسط الحسابى للقيم ٣، ٤، س، ٥ هو ٤ فأن س = ...
(٢)	الوسيط لمجموعة القيم ٣، ٧، ٢، ٩، ٥، ١١ هو	(٢)	الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم هو ....
(٣)	ترتيب الوسيط لمجموعة القيم ٧، ٦، ٥، ٨، ٤ هو	(٣)	المستقيم العمودى النازل من نقطة تلاقى المنحنيين المتجمعيين الصاعد والهابط على الأفقى يعين................
(٤)	إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو ٧ فإن عدد هذه القيم = ...	(٤)	الوسيط للقيم ٨، ١٣، ٦، ١٠، ٥، ١١هو ....
(٥)	إذا كان الوسيط مجموعة قيم ك+١، ك+٢، ك+٥، ك+٤، ك+٣ هو ١٣ فإن ك = ...	(٥)	ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ هو................
(٦)	١) إذا كان ترتيب وسيط مجموعة من القيم هو سادس فإن عدد هذه القيم = ...	(٦)	إذا كان الوسط الحسابى لستة قيم هو ٥ فإن مجموع هذه القيم = ...



(١) استخدام المنحنى المتجمع الصاعد أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى

مجموعات	-٠	-٢	-٤	-٦	مجموع
(التكرار)	١	٢	٢	٥	١٠

(٢) الجدول الآتى يبين توزيع تكرارى لاوزان ٢٠ طفلا بالكيلوجرام أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى

مجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	مجموع
(التكرار)	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

(٣) فى الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى

مجموعات	-١٠	-٢٠	س-	-٤٠	-٥٠	-٦٠	مجموع
(التكرار)	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك +٢	٤	١٠٠

١) أوجد قيمة كل من س ، ك

٢) ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعيين الصاعد والنازل ثم أحسب الوسيط

(٤) أوجد الوسيط مستعينا بالجدول الآتى واوجد قيمة ك

مجموعات	-٨	-١٢	-١٦	-٢٠	-٢٤	مجموع
(التكرار)	٤	ك	١٦	١٢	٨	٥٠

(٥) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى امتحان

مجموعات	-٢	-٦	-١٠	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦	مجموع
(التكرار)	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب

الدرس الرابع

المنوال

المنوال

هو القيمة الأكثر شيوعا فى هذه المجموعة

أو : هو القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها

فمثلا المنوال لمجموعة القيم ٧، ٣، ٥، ٥، ٢، ٩ هو ٥

(١) أوجد المنوال لمجموعة القيم

٩ ، ٦، ٤ ، ٤ ، ٦ ، ٢، ٦

المنوال = ٦

(٢) إذا كان المنوال لمجموعة القيم

٩ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٧ ، ٢، ك + ٣ هو ٧

الحل

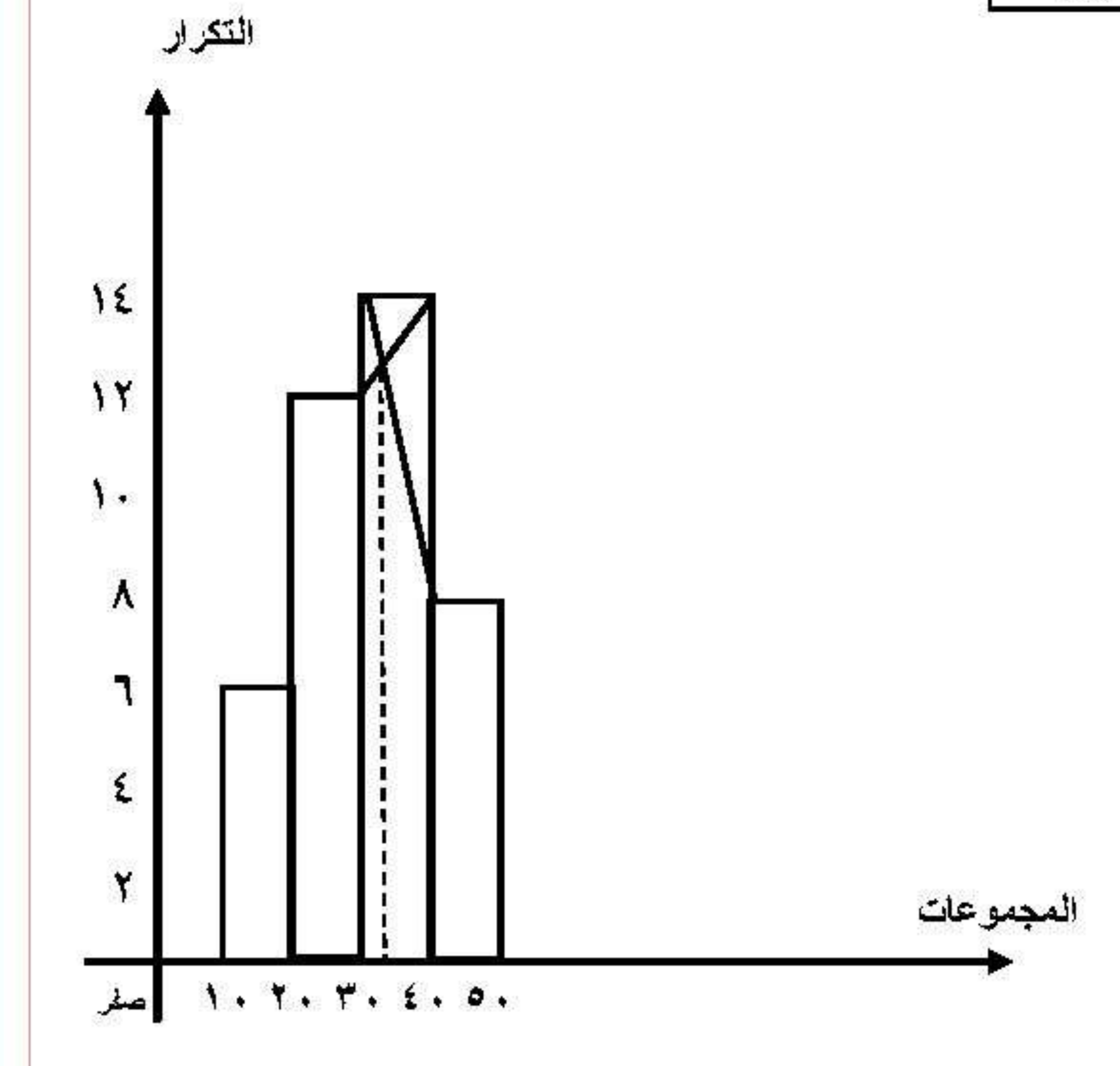
ك + ٣ = ٧

ك = ٧ - ٣

ك = ٤

(٣) (٤) أوجد المنوال للتوزيع التكرارى

المجموعة	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	المجموع
التكرار	٦	١٢	١٤	٨	٤٠ التكرار



المنوال ≃ ٣٢

تمارين على المنوال (١٧)

أكمل

(١)	المنوال لمجموعة القيم ٩،٤،٨،١،٨ هو	(١)	المنوال لمجموعة القيم ٩،٤،٦،١،٦ هو ....
(٢)	المنوال لمجموعة القيم ٩،٧،٢،٩،٥،١١ هو	(٢)	المنوال لمجموعة القيم ٤،٧،٢،٤،٥،٤ هو ....
(٣)	إذا كان المنوال لمجموعة القيم ٧،٦،س،٨،٤ هو ٧ فإن س = ...	(٣)	إذا كان المنوال لمجموعة القيم ٩،٦،س،٨،٤ هو ٩ فإن س = ...
(٤)	إذا كان المنوال لمجموعة القيم ٧،٦،س+١،٨،٤ هو ٤ فإن س = ...	(٤)	إذا كان المنوال لمجموعة القيم ٧،٦،س+٣،٨،٤ هو ٧ فإن س = ...
(٥)	إذا كان المنوال مجموعة قيم ك+١،ك+٢،ك+٥،ك+١،ك+٣ هو ١٣ فإن ك = ...	(٥)	إذا كان المنوال مجموعة قيم ك+١،ك+٢،ك+٥،ك+٧،ك+٢ هو ٢٠فإن ك = ...
(٦)	إذا كان المنوال مجموعة قيم ك+١،ك+٥،ك+٥،ك+١،ك+٥ هو ١٨ فإن ك = ...	(٦)	إذا كان المنوال مجموعة قيم ك+١،ك+٦،ك+٦،ك+١،ك+٦ هو ٣٠فإن ك = ...

(١) فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات

مجموع الدرجات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	مجموع
(التكرار)	١٦	٢٤	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠

أوجد الدرجة المنوالية

(٢) أوجد المنوال للتوزيع التكرارى التالى لدرجات ٤٠ طالبا فى أحد الاختبارات

مجموع الدرجات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	مجموع
(التكرار)	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠

(٣) أوجد المنوال للتوزيع التكرارى التالى

مجموع الدرجات	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	مجموع
(التكرار)	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

(٤) أوجد المنوال مستعينا بالجدول الأتى واوجد قيمة ك

مجموعات	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	مجموع
(التكرار)	٤	ك	١٦	١٢	٨	٥٠

(٥) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبا فى إمتحان

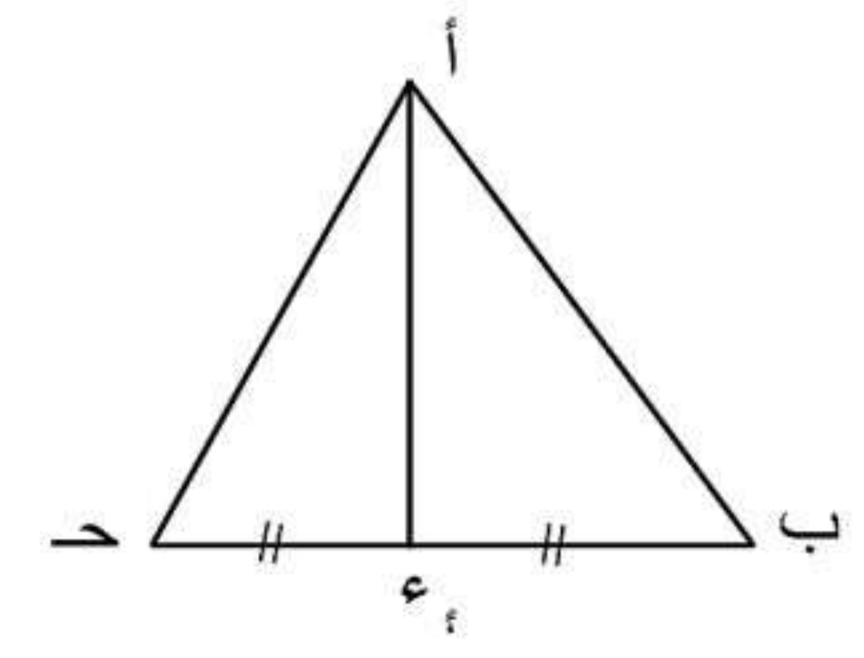
مجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	مجموع
(التكرار)	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد المنوال لدرجات الطلاب

الدرس الأول — متوسطات المثلث

متوسط المثلث

هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل



∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط في Δ أ ب جـ

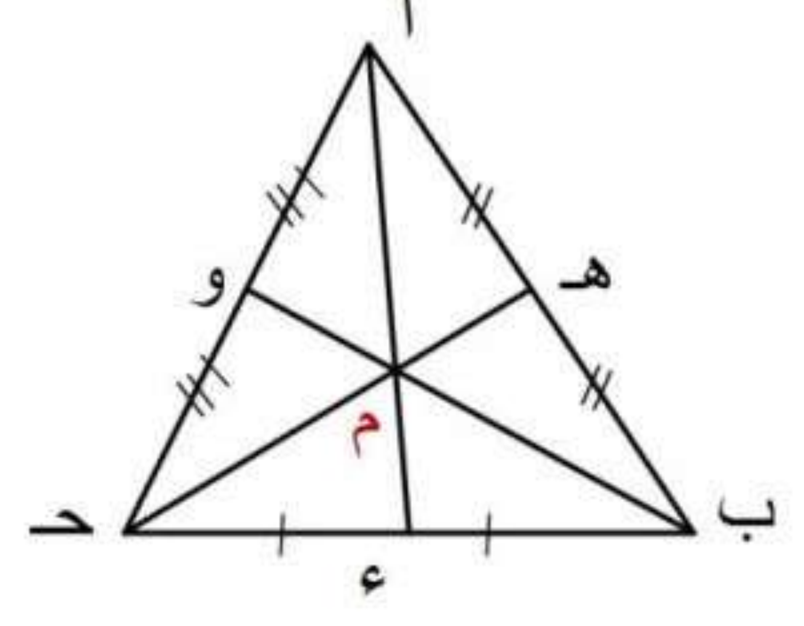
ملحوظة : - أى مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية ١

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة $\overline{\text{أ ء}}$, $\overline{\text{ب و}}$, $\overline{\text{جـ هـ}}$ هي المتوسطات الثلاثة للمثلث أ ب جـ وتتقاطع جميعاً

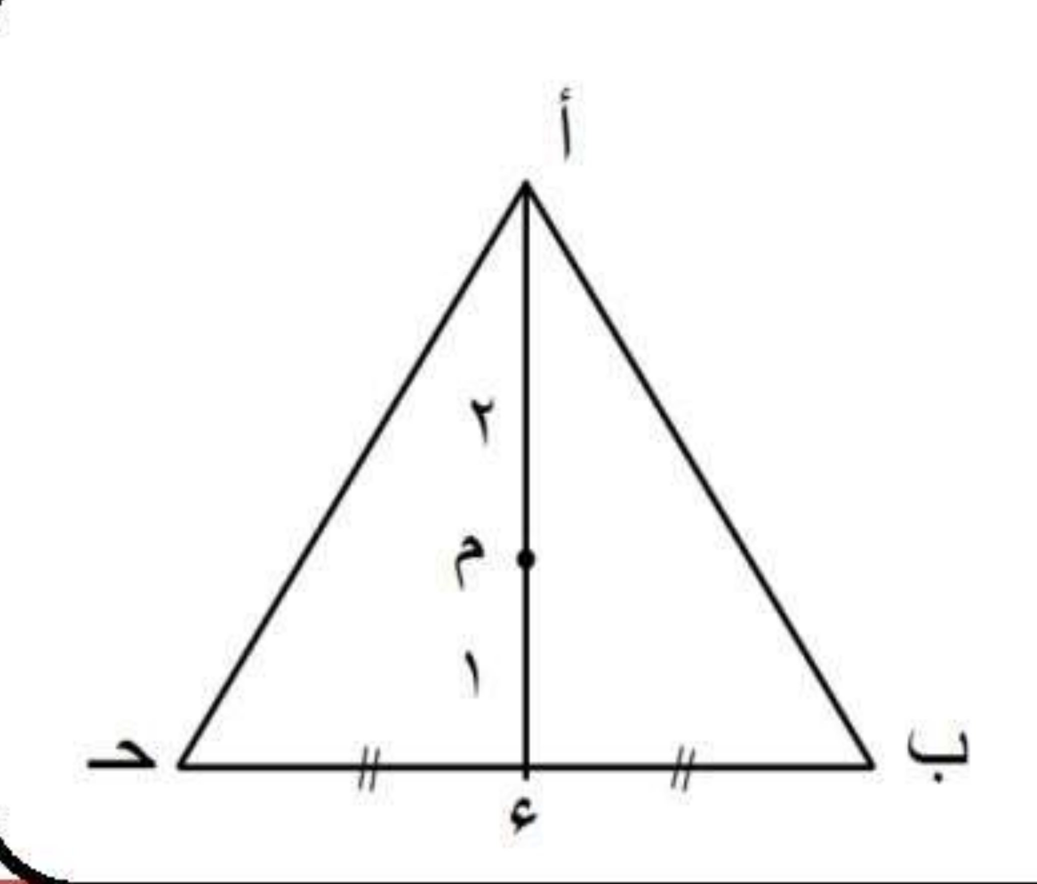
في نقطة م لأن

($\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب و}}$ ∩ $\overline{\text{جـ هـ}}$ = { م })



نظرية ٢

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم
كل منهما بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس



أمثلة

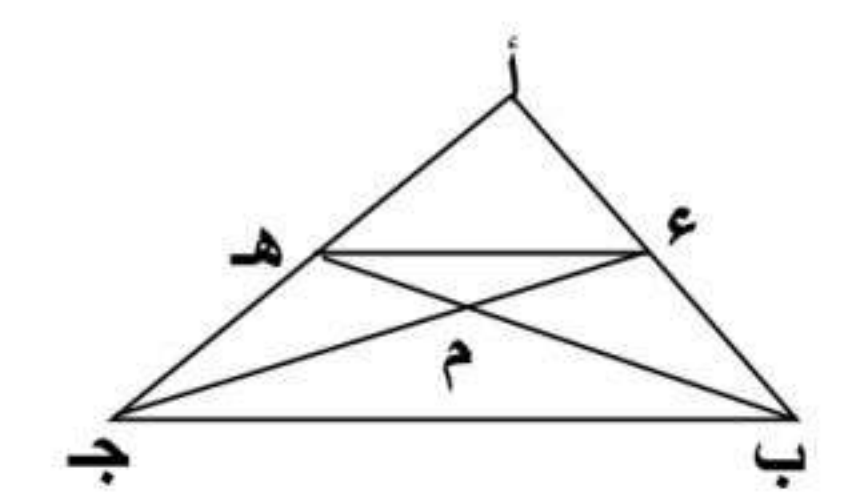
(١)

فى الشكل المقابل

ء، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ

ب م = ٨سم، ب جـ = ١٢سم

ء جـ = ٦ سم أوجد محيط Δ ء م هـ



الحل

ء منتصف أ ب ∴ جـ ء متوسط ∴ م ء = $\frac{١}{٣}$ جـ ء = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم

هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط ∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦سم

محيط Δ ء م هـ = ء م + م هـ + ء هـ = ٤ + ٢ + ٦ = ١٢ سم

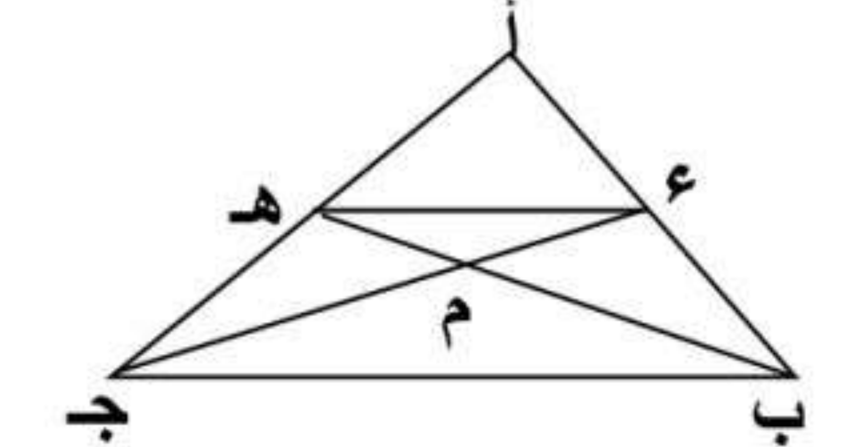
(٢)

فى الشكل المقابل

إذا كان ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ

محيط Δ م ب جـ = ٣٠سم

أوجد محيط Δ ء م هـ



الحل

ء منتصف أ ب ∴ جـ ء متوسط ∴ م ء = $\frac{١}{٢}$ م جـ

هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط ∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

محيط Δ ء م هـ = م هـ + م ء + ء هـ = $\frac{١}{٢}$ م جـ + $\frac{١}{٢}$ ب م + $\frac{١}{٢}$ ب جـ

= $\frac{١}{٢}$ (م جـ + ب م + ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ = ١٥ سم





(٣)

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه س منتصف أ ب ، ص ∈ أ جـ

، س ص // ب جـ

جـ س ∩ ب ص = {م} فإذا كان

أ م ∩ ب جـ = { ع } إثبت أن ب ع = $\frac{1}{2}$ ب جـ

الحل

س منتصف أ ب ، س ص // ب جـ

∴ ص منتصف أ جـ

س منتصف أ ب ∴ جـ س متوسط ،

ص منتصف أ جـ ∴ ب ص متوسط

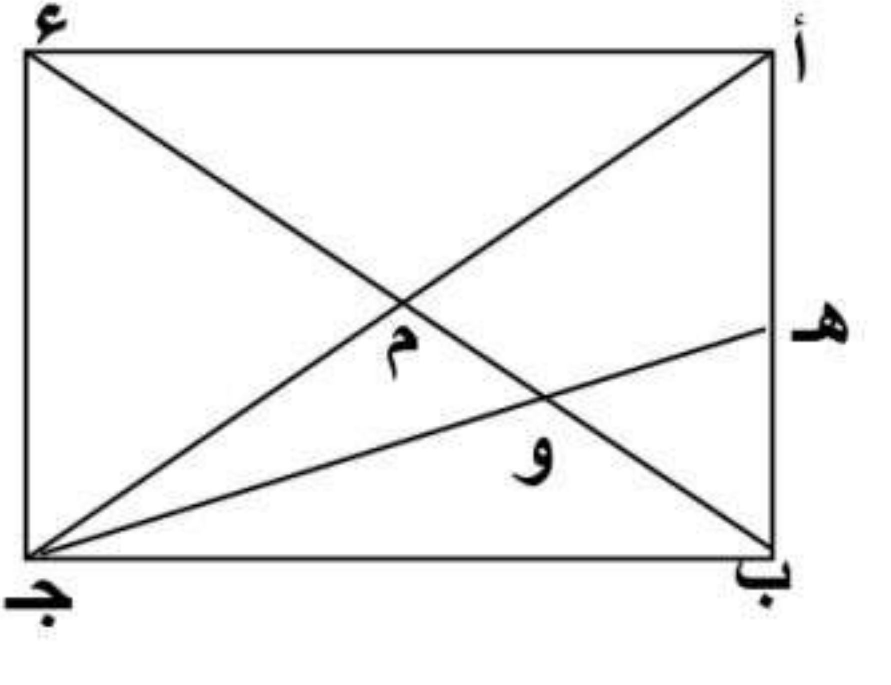
أ ع ∩ ب ص ∩ جـ س = { م }

∴ أ ع متوسط

∴ ب ع = $\frac{1}{2}$ ب جـ

(٤)

فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ،

هـ منتصف أ ب

، جـ هـ ∩ ب ء = { و }

(١) إثبت أن ب و نقطة تقاطع متوسطات

(٢) إذا ب و = ٤سم أوجد طول أ م

الحل

هـ منتصف أ ب ∴ جـ هـ متوسط فى Δ أ ب جـ

م منتصف أ جـ (القطران ينصف كلا منهما الاخر)

∴ ب م متوسط

جـ هـ ∩ ب م = { و }

∴ و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

ب و = ٤ سم

∴ و م = ٢سم

∴ ب م = ٦سم

فى المستطيل القطران متساويان وينصف كلا منهما الاخر

أ م = ب م = ٦ سم

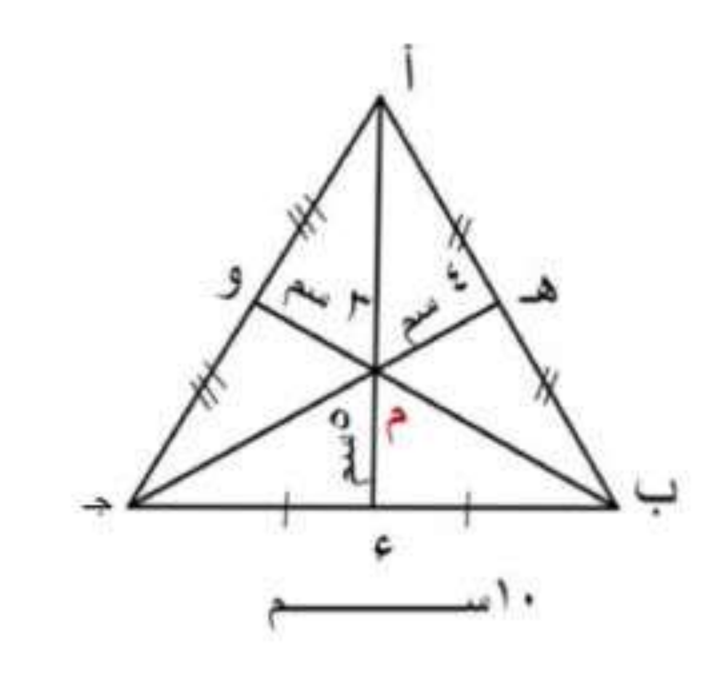


تمارين متوسطات المثلث (١)

(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية = ... متوسطات	(١)	عد متوسطات أى مثلث = ...
(٢)	متوسطات المثلث تتقاطع جمعيا فى	(٢)	.... هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل
(٣)	نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كل منهما بنسبة ...... : ...... من جهة القاعدة	(٣)	متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رؤوس المثلث إلى ......
(٤)	نقطة تقاطع تلاقى متوسطات المثلث تقسم كل منهما بنسبة ...... : ...... من جهة الرأس	(٤)	في Δ أ ب جـ إذا كانت ء منتصف ب جـ فإن أ ء يسمي ....
(٥)	نقطة تقاطع تلاقى متوسطات المثلث تقسم كلا منهما بنسبة ٢ : ...... من جهة القاعدة	(٥)	عد متوسطات أى مثلث = ...

أسئلة مقالية

(١) في الشكل المقابل



م هي نقطة تلاقى متوسطات Δ وكان ء م = ٥ سم

م و = ٣ سم م هـ = ٤ سم , ب جـ = ١٠ سم فإن

١) أ م = ... سم ٢) أ ء = ... سم

٣) م جـ = ... سم ٤) هـ جـ = ... سم

٥) ب ء = ... سم ٦) ء جـ = ... سم

٧) محيط Δ ب ء م = ... + ... + ... = ... سم

٨) ب م = ... سم ٩) ب و = ... سم

١٠) محيط Δ ء م جـ = ... + ... + ... = ... سم

(٢) في الشكل المقابل



ب جـ = ١٢ سم , ب هـ = ٩سم

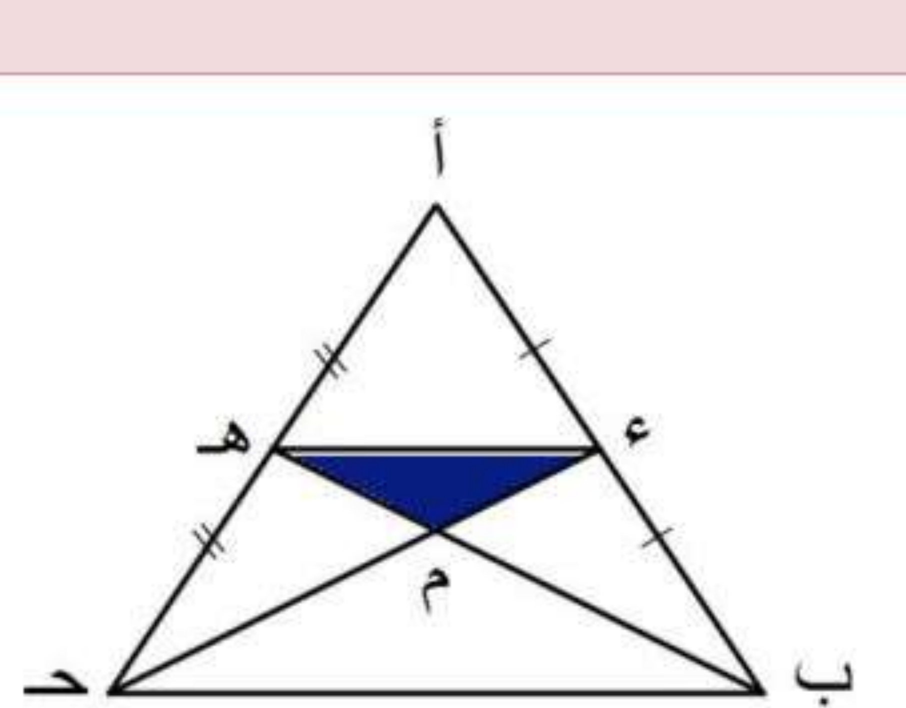
م جـ = ٨ سم , أ ب = ١٠ سم , أ جـ = ١٢ سم

فإن ١) ء هـ = ... سم ٢) م هـ = ... سم

٣) م ء = ... سم ٤) ء جـ = ... سم

٥) ب ء = ... سم ٦) هـ جـ = ... سم

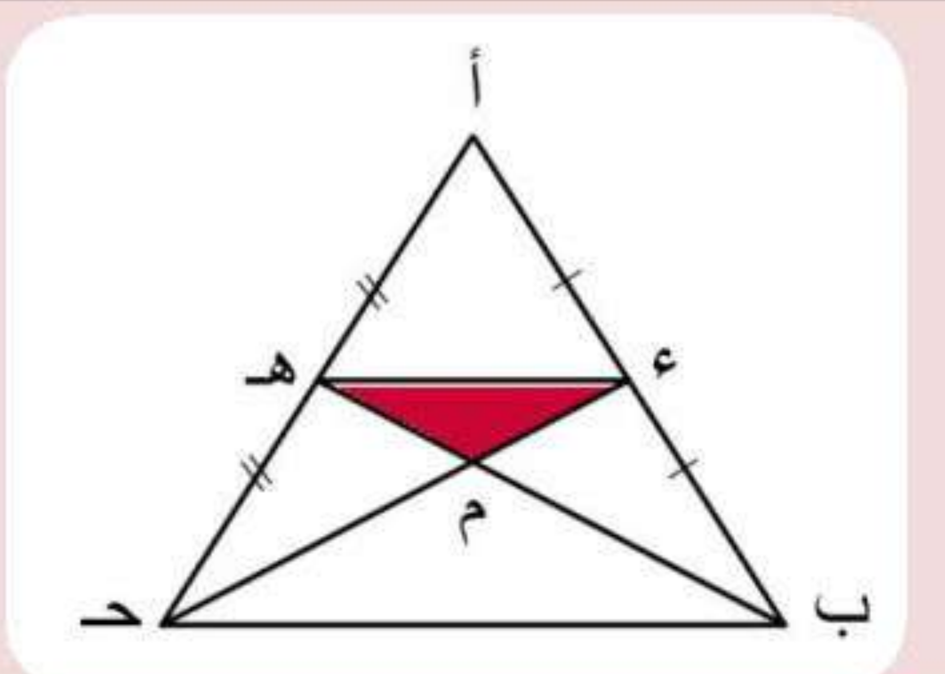
٧) محيط Δ م ء هـ = ... سم



(٣) فى الشكل المقابل

ب م = ٦ سم , جـ ب = ١٣ سم , جـ ء = ١٢ سم

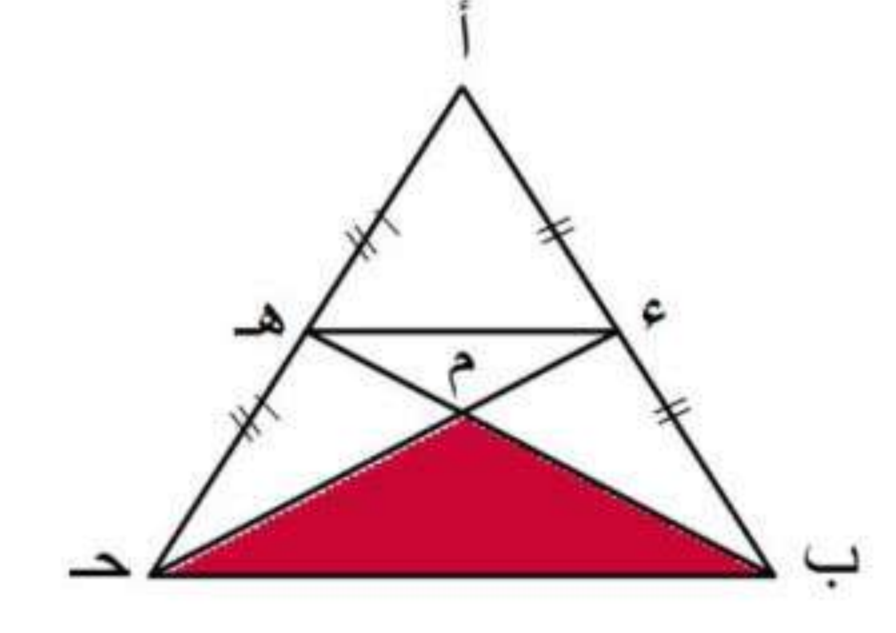
أوجد محيط Δ ء م هـ



(٤) فى الشكل المقابل

ء جـ = ٩ سم , ب م = ٨ سم , ب جـ = ١٠ سم

أوجد محيط Δ ء م هـ



(٥) فى الشكل المقابل



إذا كانت ء , هـ منتصفى $\overline{\text{أ ب}}$, $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب

$\overline{\text{ب هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ء جـ}}$ = { م } , ءهـ = ٤ سم

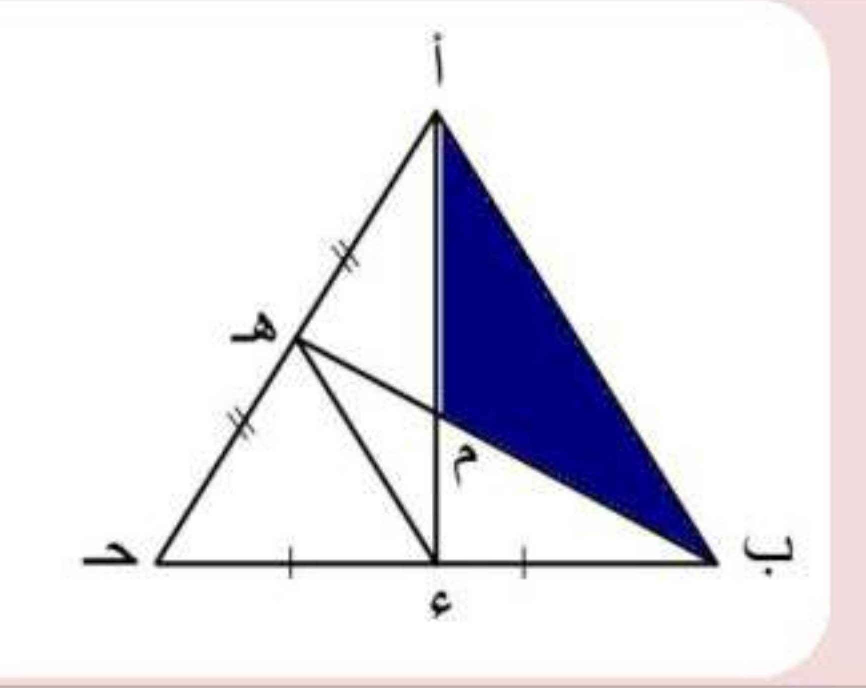
, ء م = ٣ سم , ب هـ = ٦ سم

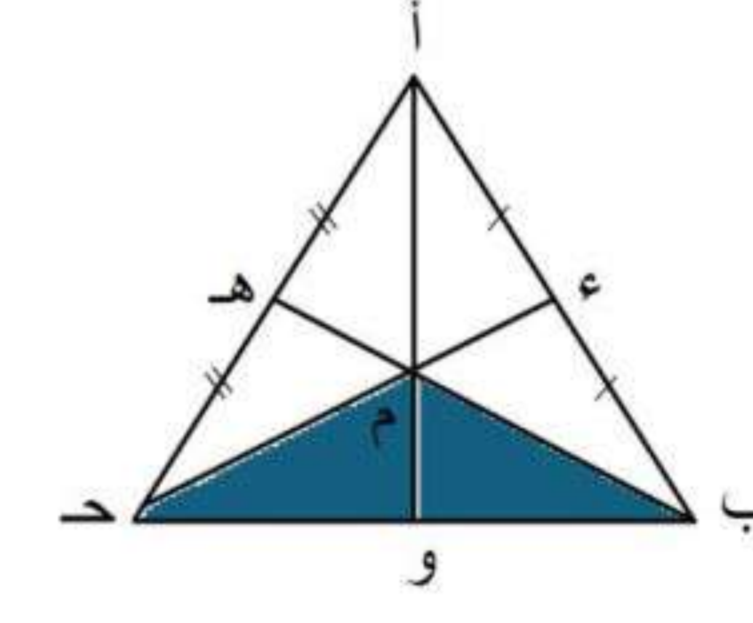
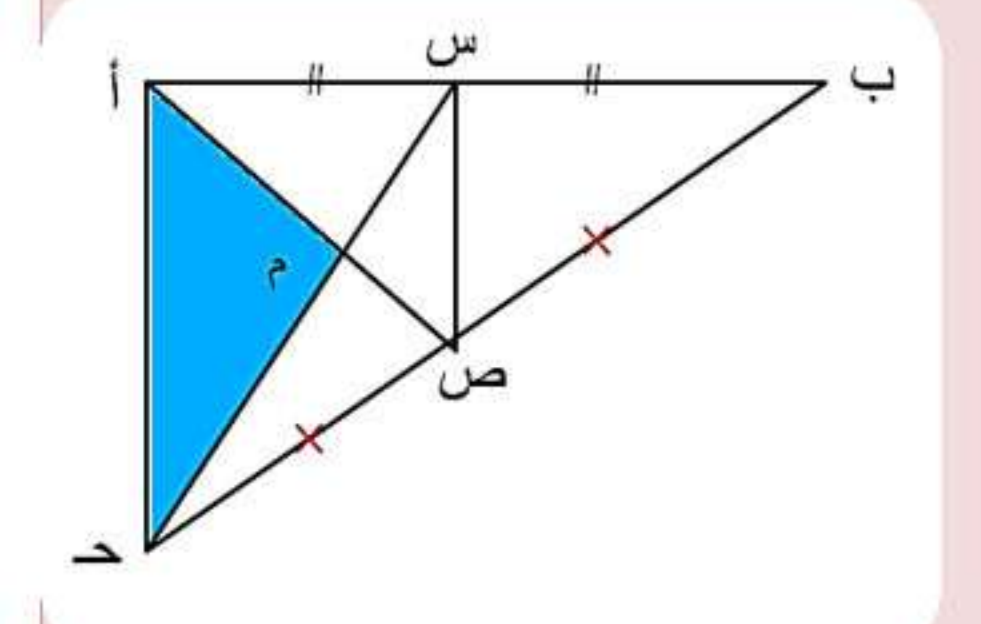
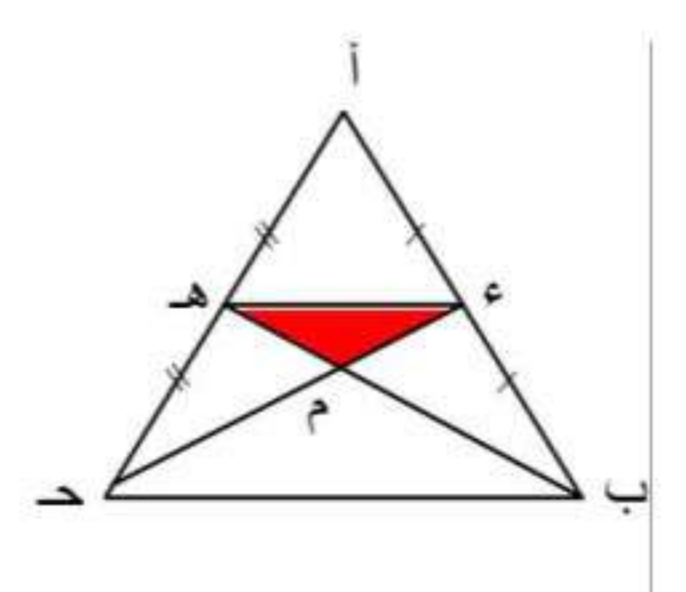
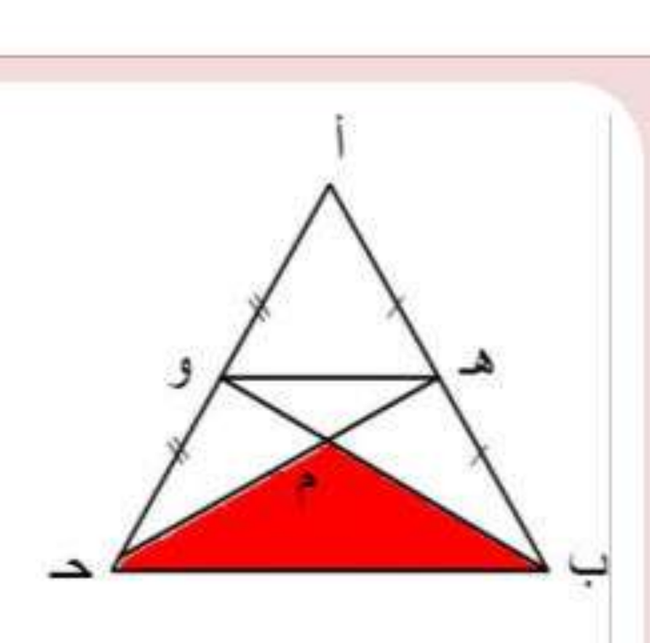
أوجد محيط Δ ب م جـ

(٦) فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ فيه م هـ = ٤ سم , م ء = ٣ سم

ء هـ = ٥ سم أ وجد محيط Δ أ م ب

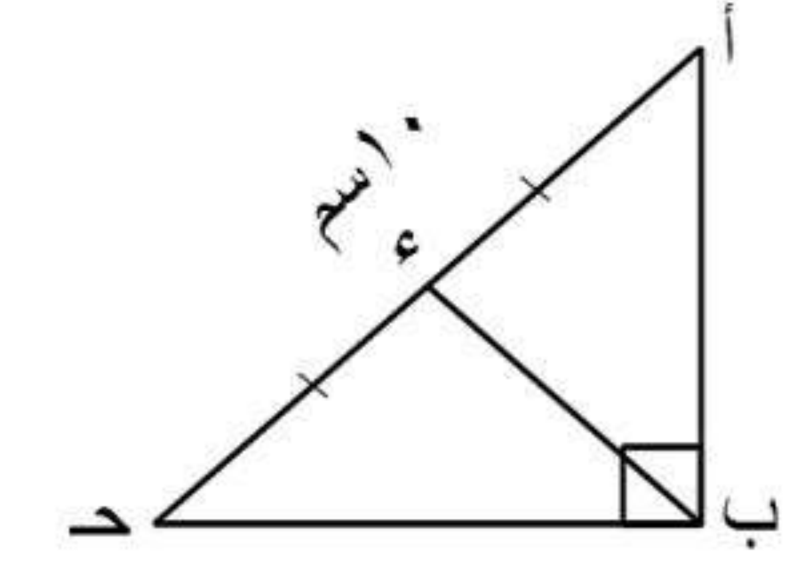


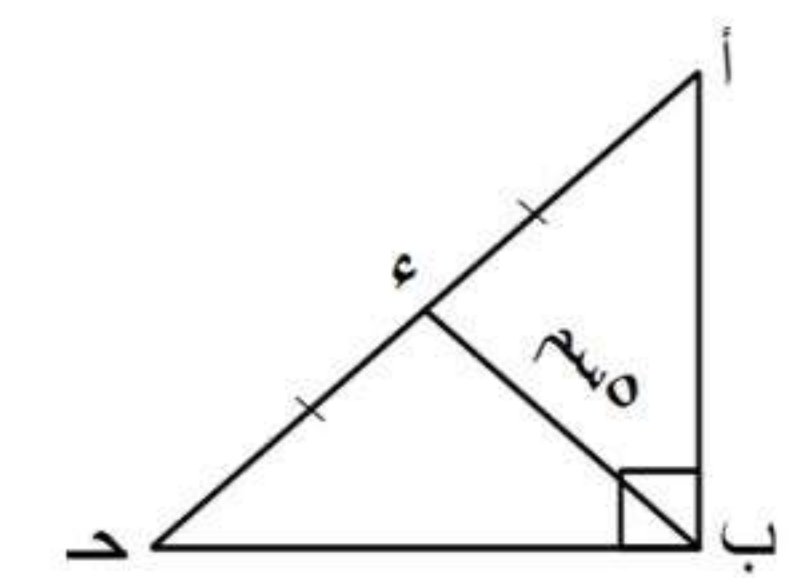
(٧)	أ ب جـ مثلث فيه و , هـ منتصفا أ ب , أ جـ على الترتيب ب هـ ∩ جـ و = { م } رسم أ م بحيث أ م ∩ ب جـ = { ء } فإذا كان ب جـ = ١٠ سم , أ ء = ١٢ سم أوجد طول كلا من ب ء , أ م
(٨)	أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف ب جـ , م ∈ أ ء بحيث أ م = ٢ م ء رسم جـ م فقطع أ ب في هـ فإذا كان هـ جـ = ١٢ سم أوجد طول هـ م
(٩)	فى الشكل المقابل م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ حيث ب هـ = ٦ سم , جـ ء = ٩ سم , ب و = ٣,٥ سم أوجد محيط Δ م ب جـ 
(١٠)	فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث فيه س منتصف أ ب , ص منتصف ب جـ , س ص = ٥ سم س جـ ∩ أ ص = { م } حيث جـ م = ٨ سم ص م = ٣ سم أوجد محيط Δ أ م جـ 
(١١)	فى الشكل المقابل ء , هـ منتصفى أ ب , أ جـ على الترتيب جـ ء ∩ ب هـ = { م } فإذا كان جـ ء = ١٨ سم , ب م = ١٢ سم , ب جـ = ١٤ سم أ وجد محيط Δ م ء هـ 
(١٢)	فى الشكل المقابل هـ و = ٥ سم , هـ م = ٣ سم , ب و = ١٢ سم هـ منتصف أ ب , و منتصف أ جـ أ وجد محيط Δ ب م جـ 

الدرس الثانى متوسطات المثلث

نظرية ٣

طول المتوسط الخارج من رأس القائمة = $\frac{1}{2}$ طول الوتر





$\overline{\text{ب ء}}$ متوسط خارج من رأس ب القائمة

∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ جـ

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

$\overline{\text{ب ء}}$ متوسط خارج من رأس ب القائمة

∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ جـ

٥ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

أ جـ = ١٠ سم

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة

نتيجة

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

أمثلة

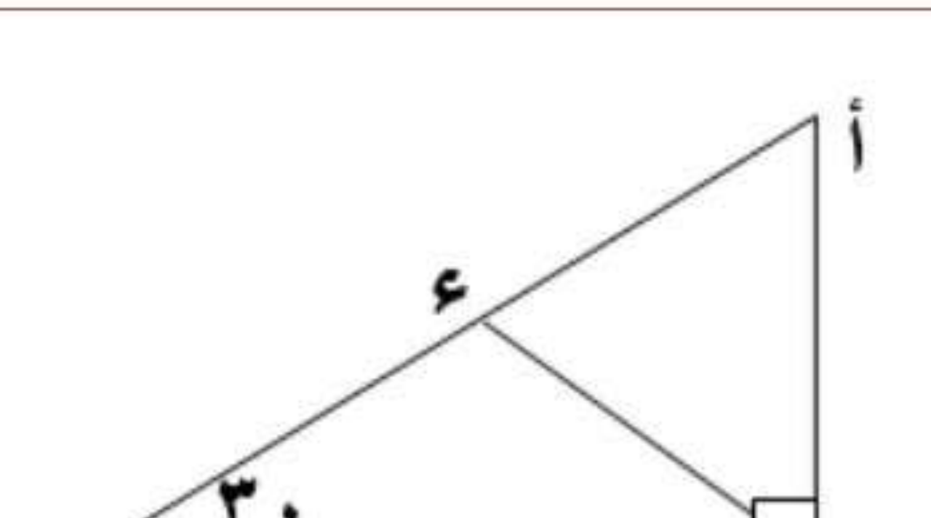
(١)

فى الشكل المقابل

أ جـ = ٢٠سم ، ق(جـ) = ٣٠°

ق(أ ب جـ) = ٩٠ ، ء منتصف أ جـ

أوجد محيط Δ أ ب ء



الحل

ء منتصف أ جـ ، ق (أ ب جـ) = ٩٠

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ١٠سم

ق(جـ) = ٣٠° ، ق(أ ب جـ) = ٩٠

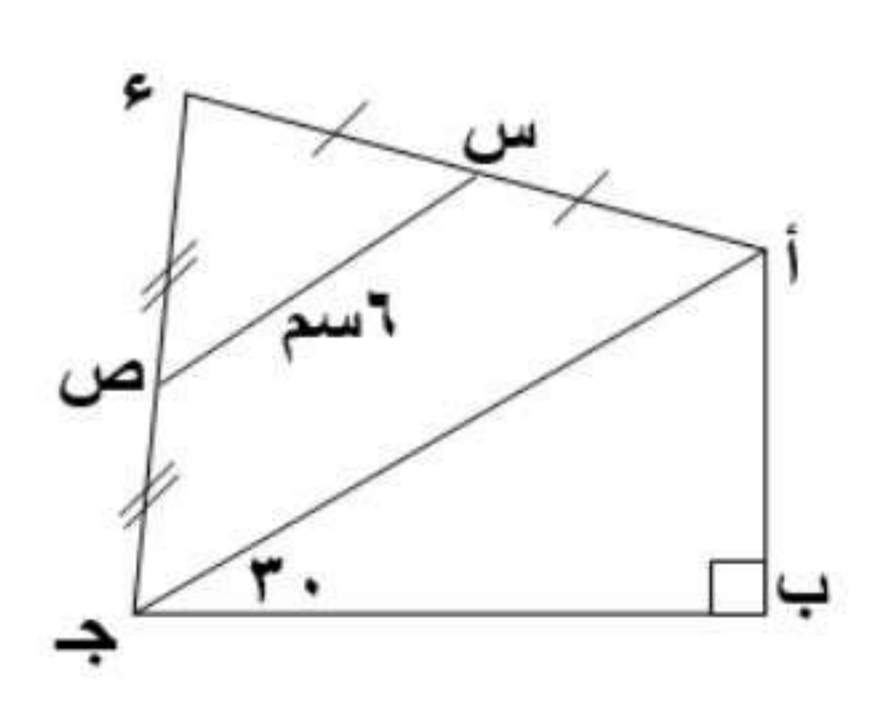
∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ١٠سم

محيط Δ أ ب ء = أ ب + ب ء + أ ء = ١٠ + ١٠ + ١٠ = ٣٠ سم

(٢)

فى الشكل المقابل

أوجد طول أ ب



الحل

س منتصف أ ء ، ص منتصف ء جـ

س ص = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ أ جـ = ١٢ سم

فى Δ أ ب جـ

ق(أ ب جـ) = ٩٠° ، ق (أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٦ سم

تمارين تابع متوسطات المثلث (٢)

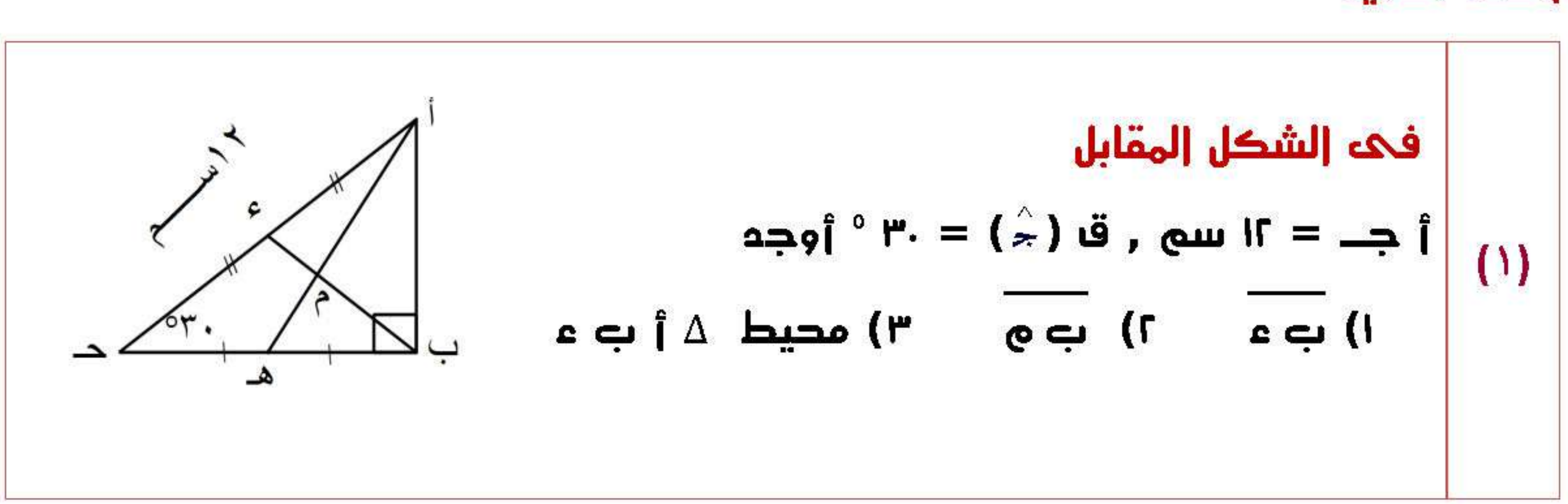
(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	عدد متوسطات Δ منفرج زاوية هو	(١)	إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ , أ ء متوسط طوله ١٢ سم فإن أ م =... سم
(٢)	طول المتوسط الخارج من رأس القائمة = ... طول الوتر	(٢)	١) إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ , أ ء متوسط فإن أ ء= ....
(٣)	طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ ° = ... طول الوتر	(٣)	٢) نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كل منهما بنسبة .... : ٥ من جهة القاعدة
(٤)	طول الوتر .... طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ °	(٤)	$\overline{أ ء}$ متوسط فى المثلث أ ب جـ , م نقطة تلاقى متوسطات المثلث م ء = ٢ سم فإن أ ء = ... سم
(٥)	طول الوتر .... طول المتوسط الخارج من رأس القائمة	(٥)	٣)طول الوتر = ... طول ضلع مقابل للزاوية ٣٠ °

أسئلة مقالية

(١) فى الشكل المقابل

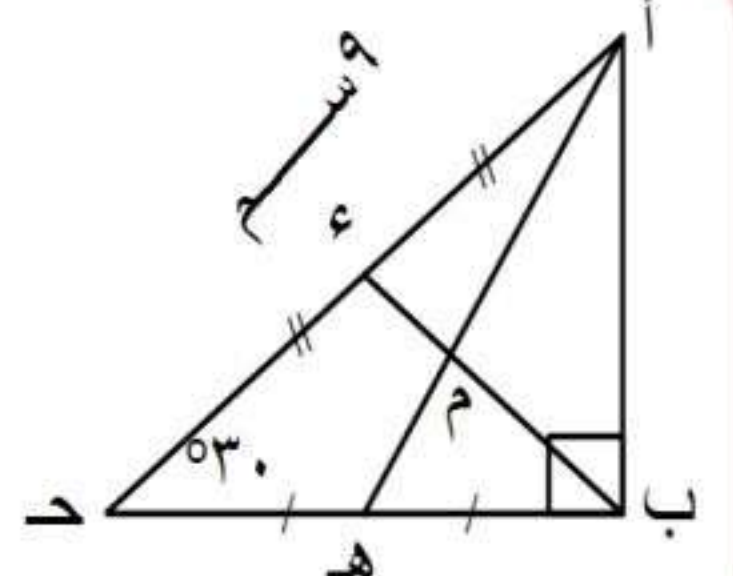
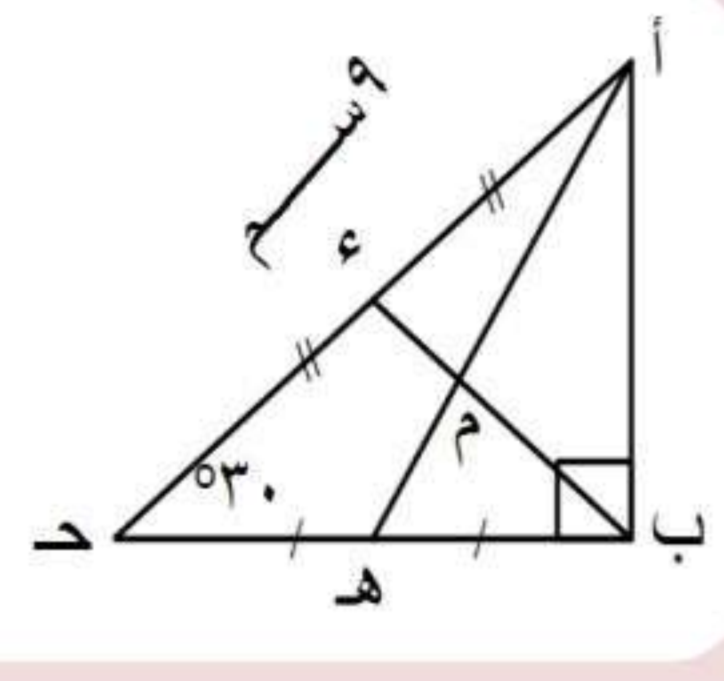
أ جـ = ١٢ سم , ق (جـ) = ٣٠ ° أوجد

١) $\overline{ب ء}$ ٢) $\overline{ب م}$ ٣) محيط Δ أ ب ء



(٢)

فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

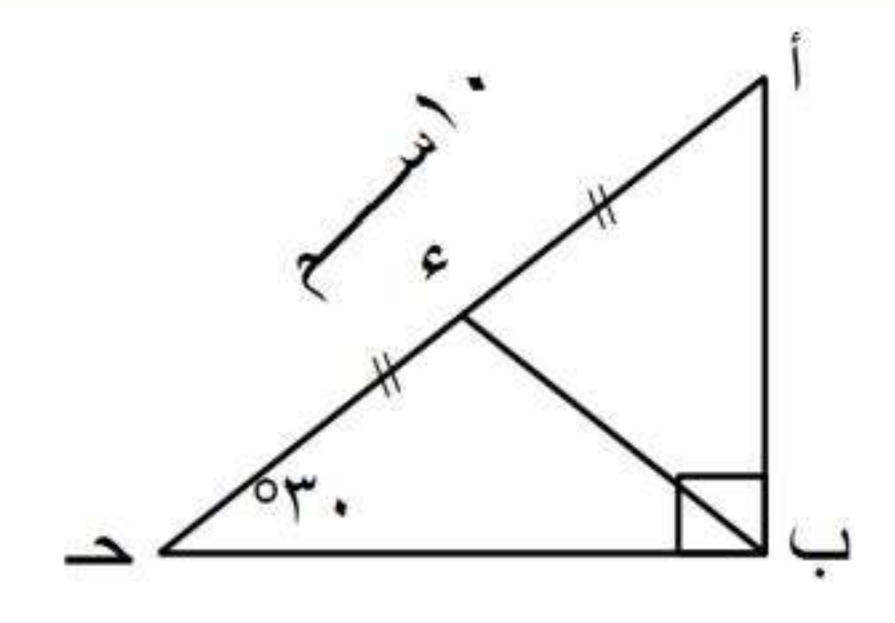
ء منتصف $\overline{أ جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

أ جـ = ٩ سم أوجد طول

١) $\overline{أ ب}$ ٢) $\overline{ب ء}$ ٣) $\overline{ب م}$

(٣)

فى الشكل المقابل



Δ أ ب جـ قائم الزاوية فيه ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ،

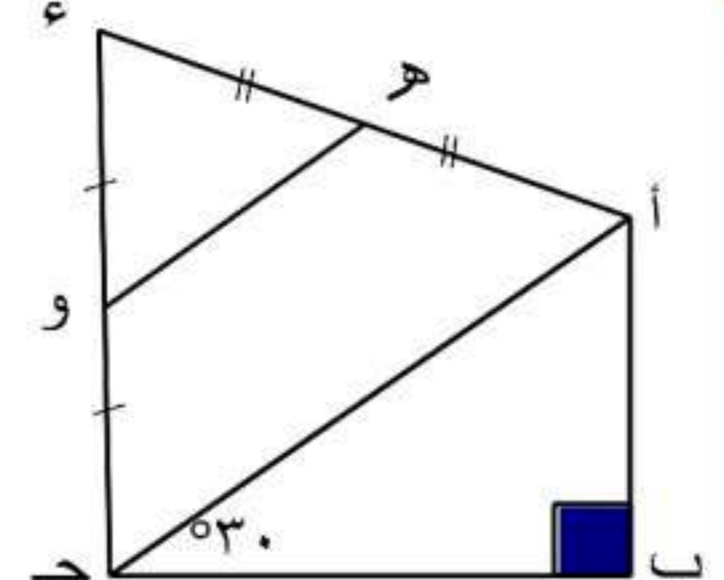
$\overline{ب ء}$ متوسط ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ، أ جـ = ١٠ سم

اثبت أن

Δ أ ب ء متساوى الأضلاع ثم أ وجد محيط Δ أ ب ء

(٤)

فى الشكل المقابل

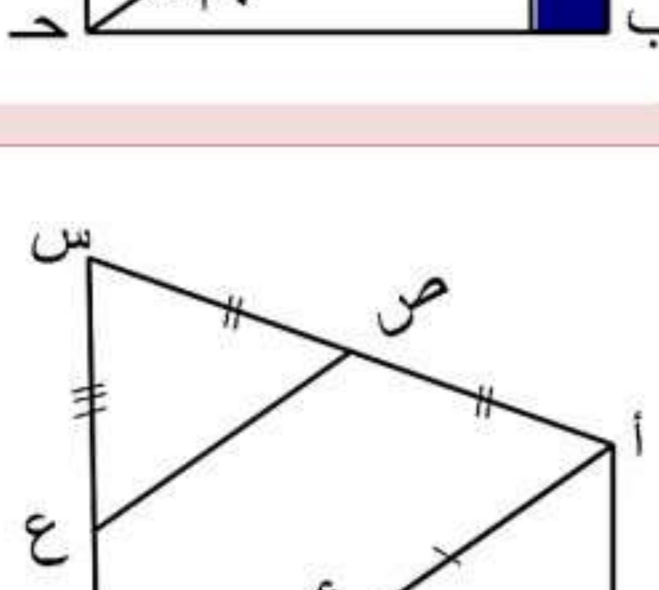
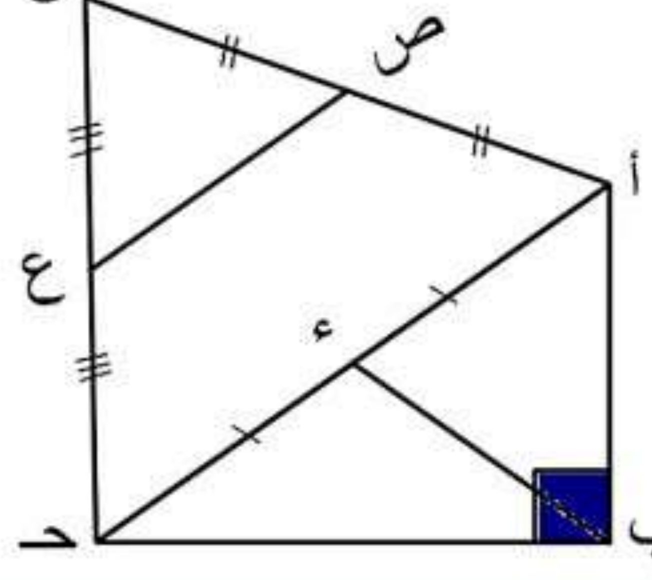


ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، ق (ب $\hat{جـ}$ أ) = ٣٠° ،

هـ منتصف $\overline{أ ء}$ ، و منتصف $\overline{ء جـ}$

اثبت أن أ ب = هـ و

(٥)

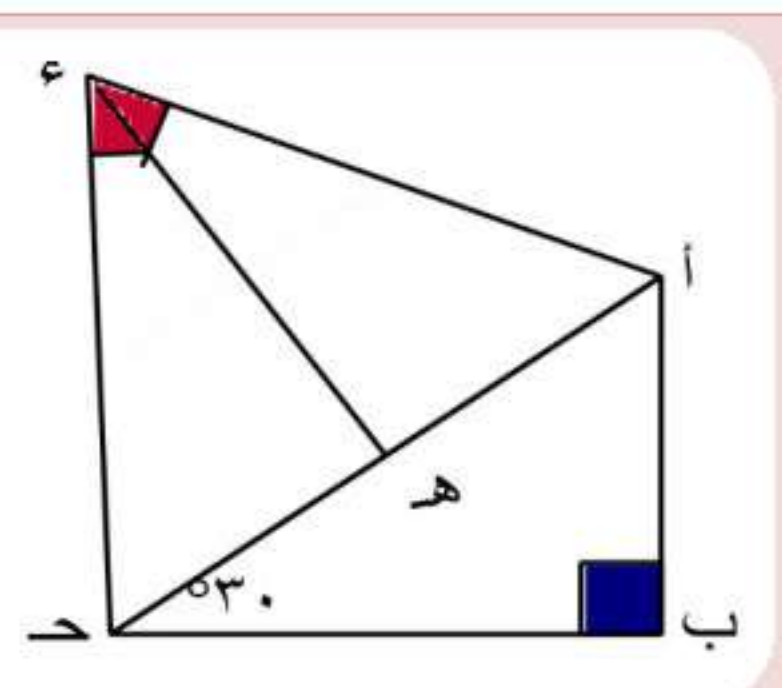
فى الشكل المقابل

$\overline{ب ء}$ متوسط ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ص ، ع منتصفى

$\overline{أ س}$ ، $\overline{س جـ}$ اثبت أن ب ء = ص ع

(٦)

فى الشكل المقابل



ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{ء}$ جـ) ٩٠° ،

ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠°

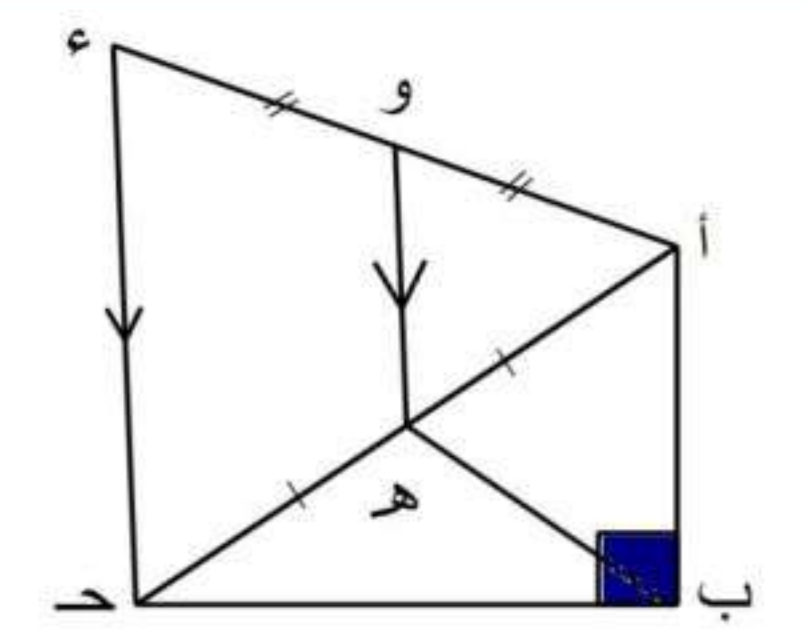
، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ اثبت أن أ ب = ء هـ

(٧) فى الشكل المقابل

إذا كان أ جـ = جـ ء حيث أن ق ($\hat{ب}$) = ٩٠ ° ,

هـ , و منتصفى $\overline{أ جـ}$, $\overline{أ ء}$

اثبت أن ب هـ = هـ و

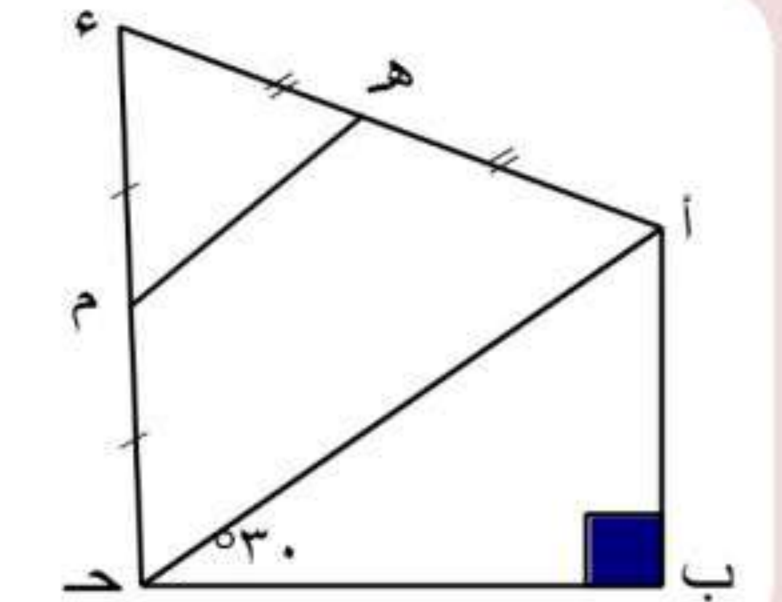


(٨) فى الشكل المقابل

ق ($\hat{ب}$) = ٩٠ ° , هـ , م منتصفى $\overline{أ ء}$, $\overline{جـ ء}$

علي الترتيب ,ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠ °

اثبت أن أ ب = هـ م

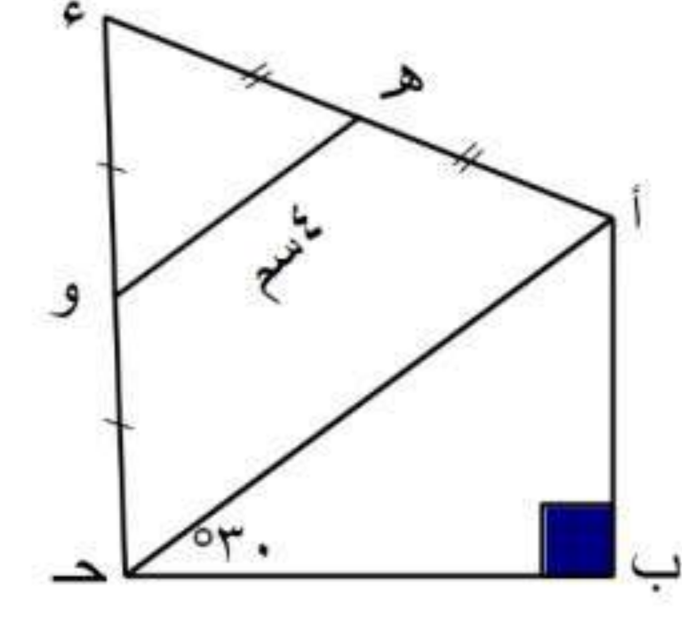


(٩) فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق ($\hat{ب}$) = ٩٠ ° ,

هـ منتصف $\overline{أ ء}$, و منتصف $\overline{جـ ء}$ ق (أ $\hat{جـ}$ ب)

, هـ و = ٤ سم أوجد بالبرهان طول $\overline{أ ب}$



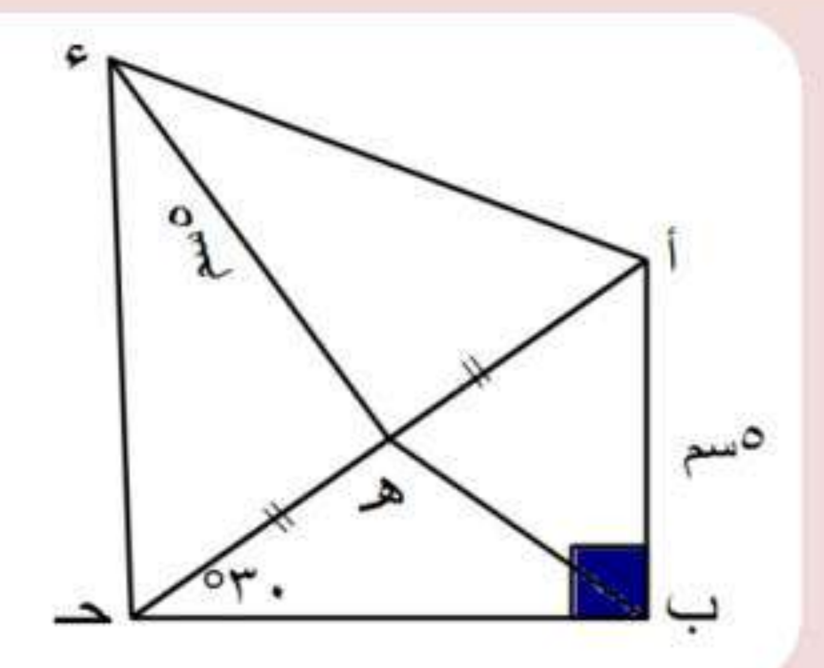
(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ,

ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠ °, أ ب = ٥ سم

هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ إذا كان ء هـ = ٥ سم

اثبت أن ق (أ $\hat{ء}$ جـ) = ٩٠ °

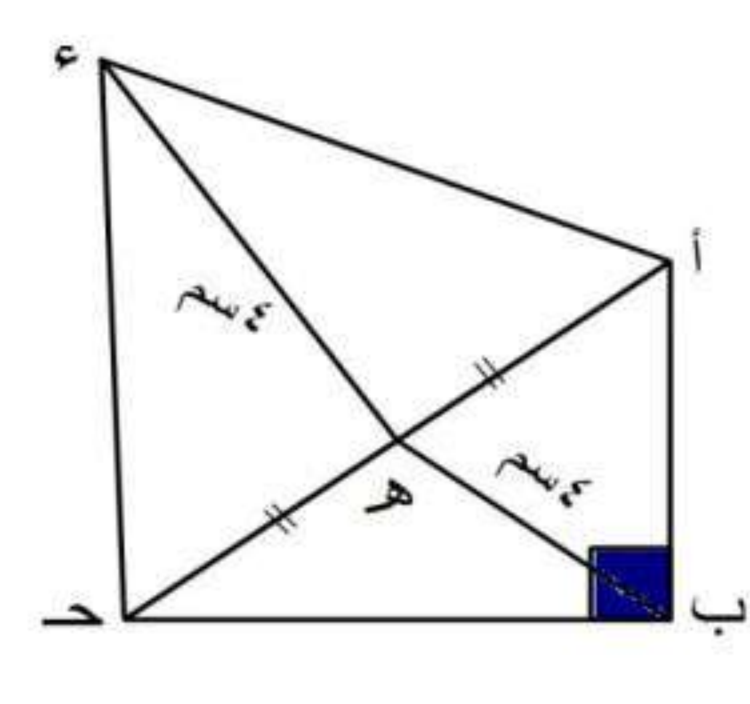


(١١) فى الشكل المقابل

ب هـ = ٤ سم , ء هـ = ٤ سم , ق ($\hat{ب}$) = ٩٠ °

, هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

اثبت أن ق (أ $\hat{ء}$ جـ) = ٩٠ °



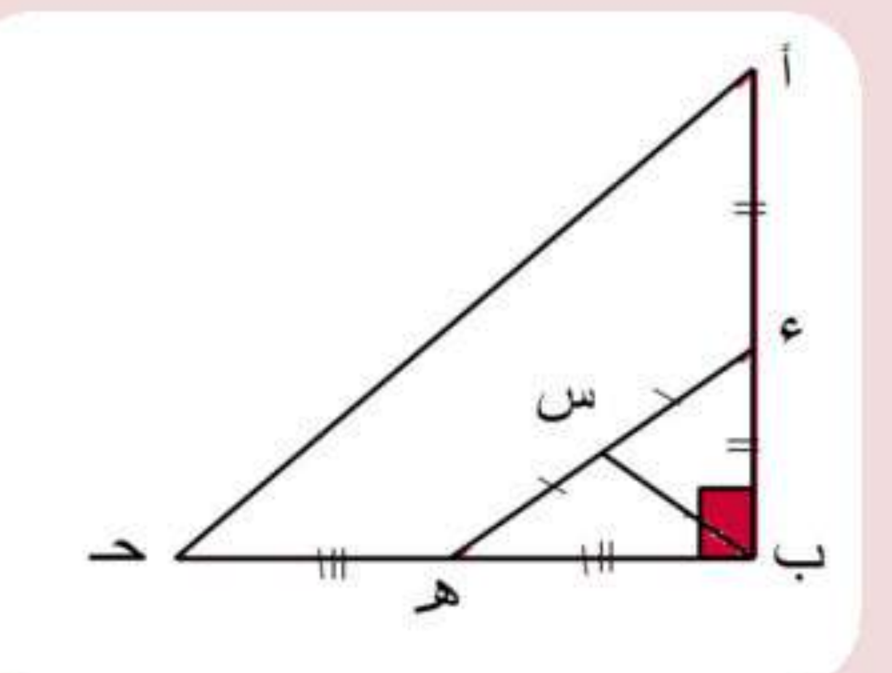
(١٢)



فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

س منتصف $\overline{ء هـ}$ اثبت ب س = $\frac{1}{4}$ أ جـ

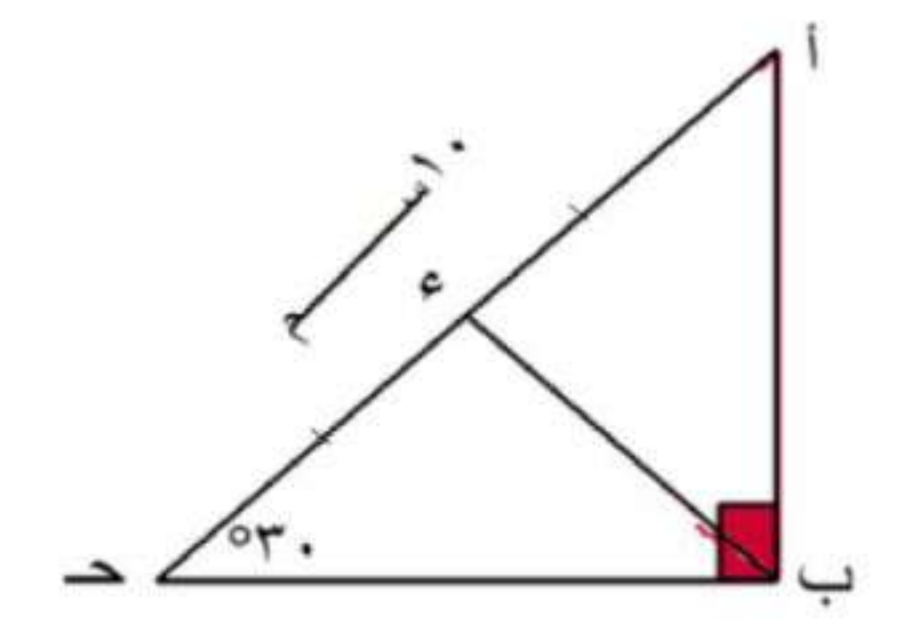


(١٣)

فى الشكل المقابل

$\overline{ب ء}$ متوسط خارج من زاوية ب القائمة

أوجد محيط المثلث أ ب ء ثم أوجد طول $\overline{ب جـ}$



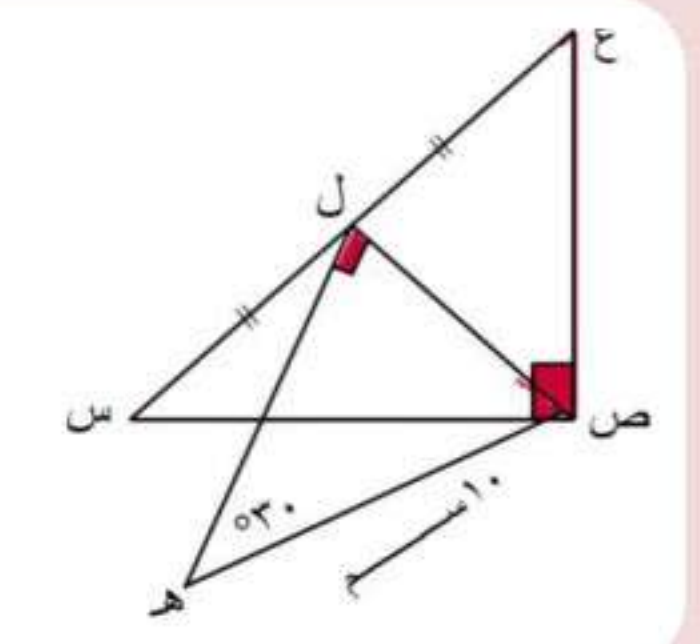
(١٤)

فى الشكل المقابل

ق (ص $\hat{ل}$ هـ) = ٩٠ ° ، ق ($\hat{هـ}$) = ٣٠ °

ص هـ = ١٠ سم ، ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٩٠ °

ل منتصف $\overline{س ع}$ اوجد طول $\overline{س ع}$ بالبرهان



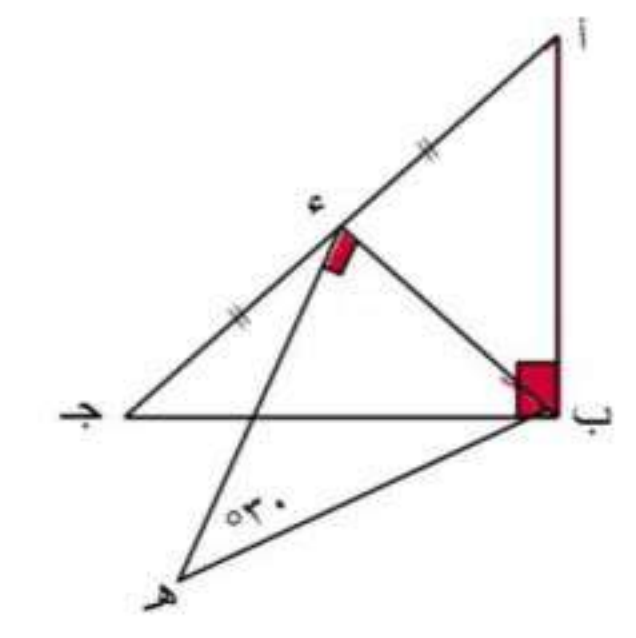
(١٥)

فى الشكل المقابل

ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (ب $\hat{ء}$ هـ) ٩٠ °

ق ($\hat{هـ}$) = ٣٠ ° ، ء منتصف $\overline{أ جـ}$

اثبت أن أ جـ = ب هـ



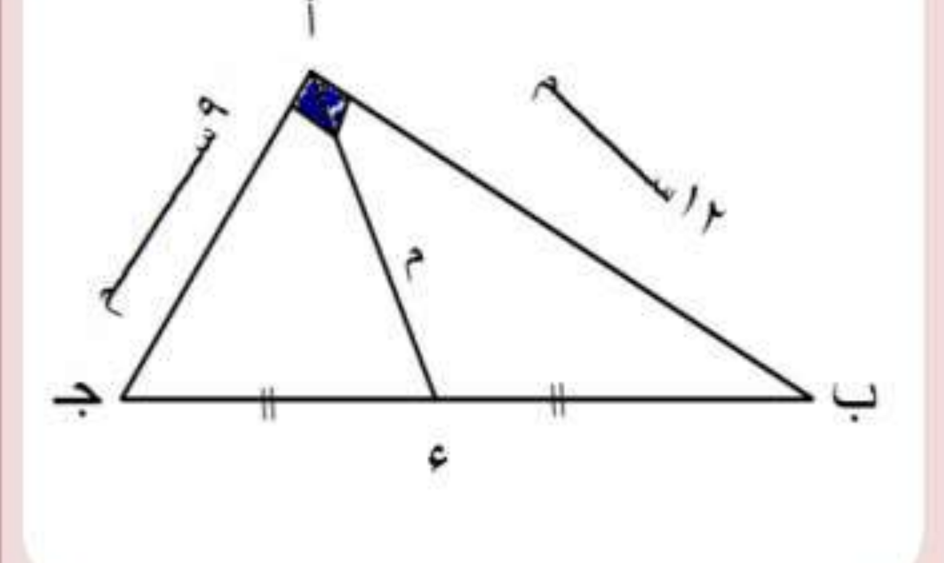
(١٦)

فى الشكل المقابل

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٩٠ ° ، أ ب = ١٢ سم

، أ جـ = ٩ سم ، $\overline{أ ء}$ متوسط في Δ أ ب جـ

م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ اوجد طول $\overline{أ م}$

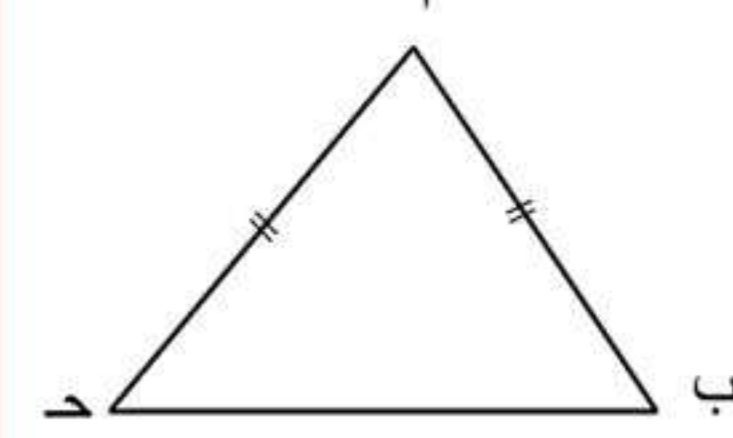


الدرس الثالث المثلث المتساوى الساقين

نظرية ١

إذا كا ن أ ب = أ جـ فإن Δ أ ب جـ يكون متساوى الساقين

نظـــــرية ١



زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

ملاحظات

١) كل من زاويتين القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين حادة

٢) زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

نتيجة

١) إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاث تكون متطابقة ويكون قياس كل منهما ٦٠ ° بينما زواياه الخارجة أيضاً متطابقة وقياس كل منهما ١٢٠ °

٢) إذا تساوى قياس زاويتان فى مثلث كان المثلث متساوى الساقين

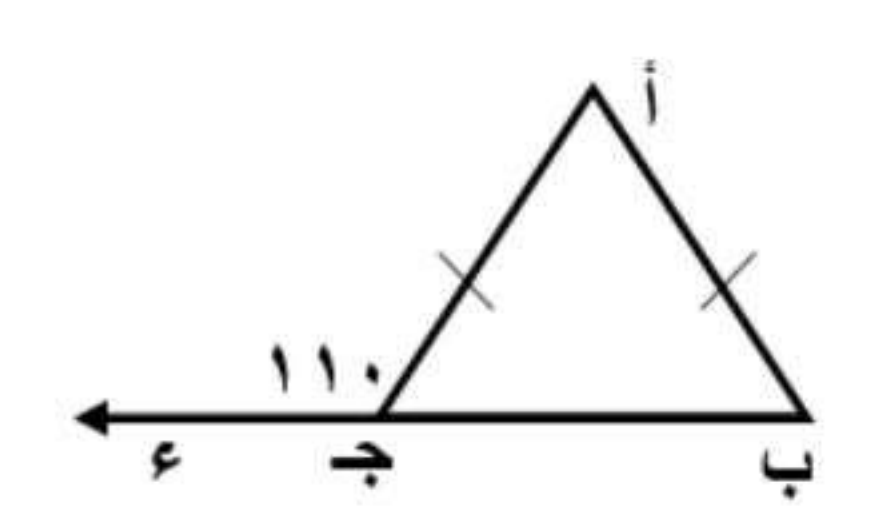
أمثلة

(١)

فى الشكل المقابل

إذا كانت ء ∋ ب جـ ، أ ب

أوجد قياسات زوايا المثلث



الحل

ق ( ) + ق ( ) = ١٨٠

[زاويتان متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

∴ ق ( ) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠

أ ب = أ جـ

∴ ق (ب) = ق ( ) = ٧٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

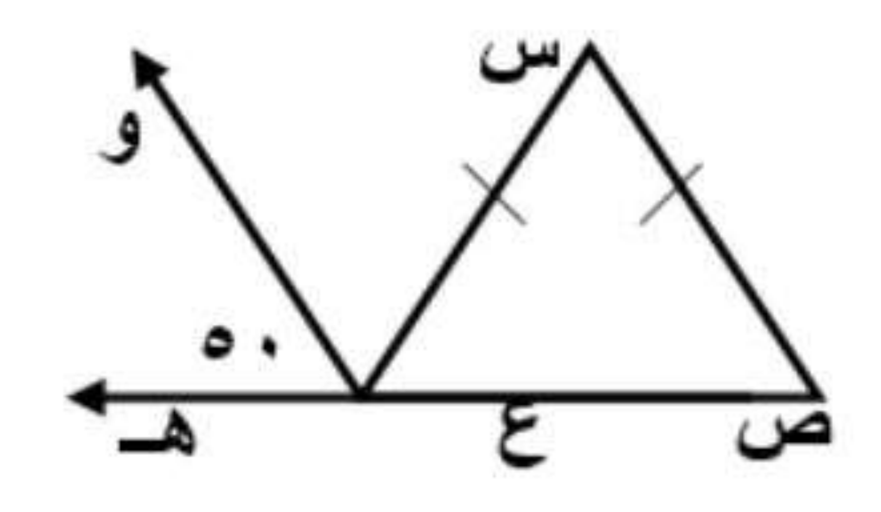
∴ ق (أ) = ١٨٠ − [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

(٢)

فى الشكل المقابل

ص س // ع و ، س ص = س ع

أوجد قياسات زوايا المثلث س ص ع



الحل

ص س // ع و

∴ ق (ص) = ق ( ) = ٥٠° [متناظرتان]

س ص = س ع

∴ ق (ص) = ق (ص) = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

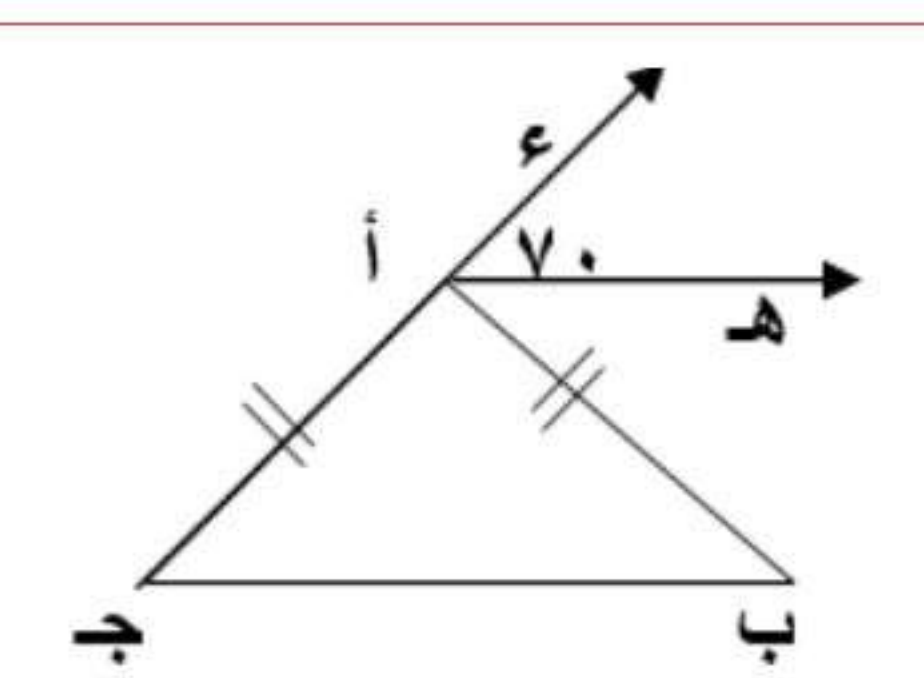
ق (س) = ١٨٠° − [٥٠° + ٥٠] = ١٨٠ −١٠٠° = ٨٠°

(٣)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، أ هـ // جـ ب

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



الحل

أ هـ // جـ ب

∴ ق ( ) = ق ( ) = ٧٠

أ ب = أ جـ

∴ ق (بَ) = ق ( ) = ٧٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق (جـ) = ١٨٠ − [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠

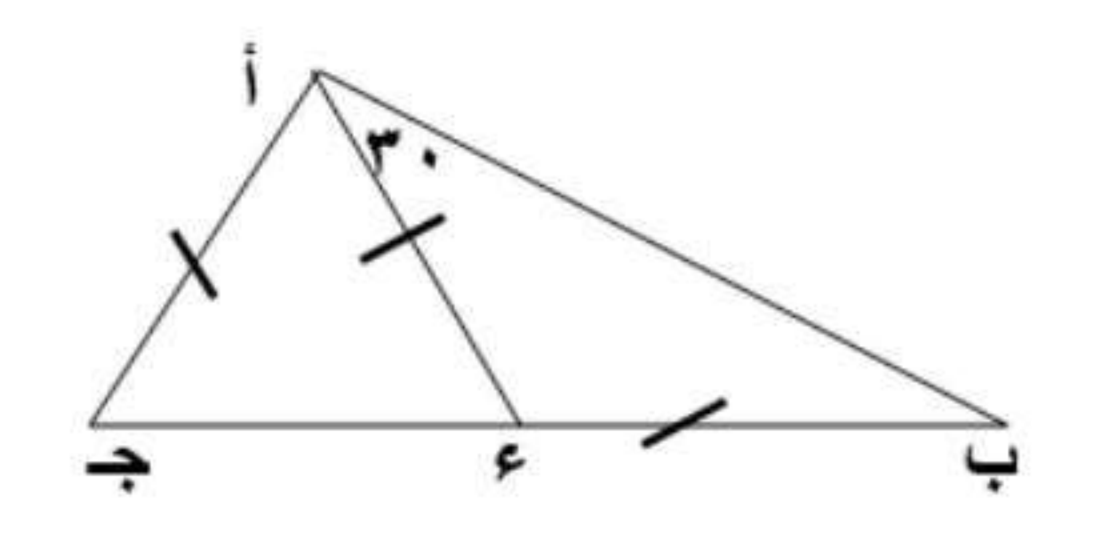
(٤)

فى الشكل المقابل

ب ء = أ ء = أ جـ

ق ( ) = ٣٠

أوجد ق ( )



الحل

فى △ أ ب ء

ب ء = أ ء

∴ ق (بَ) = ق ( ) = ٣٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق ( ) = ١٨٠° − [٣٠ + ٣٠] = ١٨٠° − ٦٠ = ١٢٠°

ق ( ) + ق ( ) = ١٨٠

[متجاورتان حادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع بدايته تقع على المستقيم]

∴ ق ( ) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٨٠

فى △ أ ء جـ أ ء = أ جـ

∴ ق ( ) = ق ( ) = ٨٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

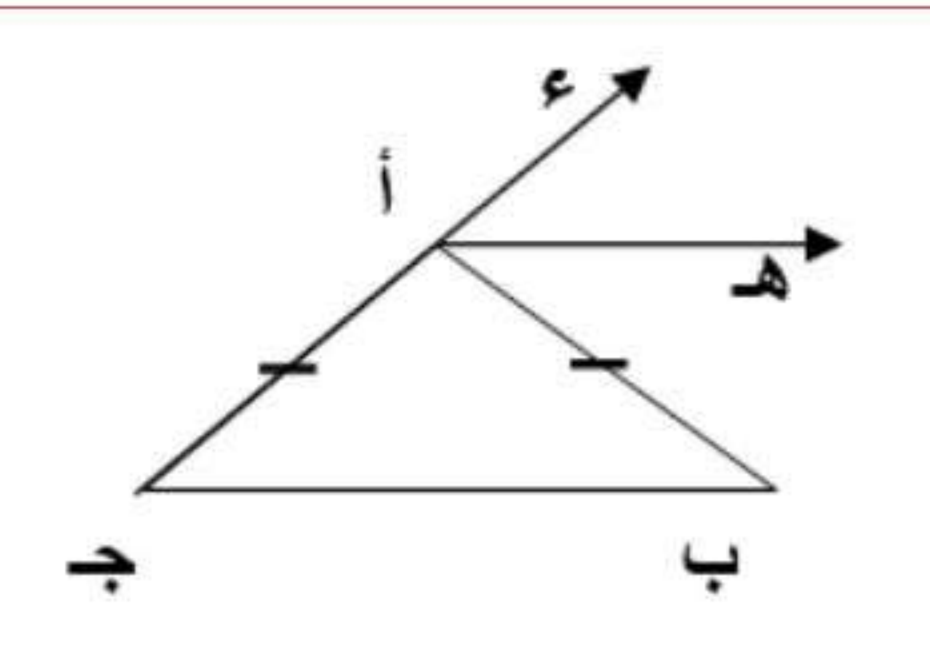
∴ ق ( ) = ١٨٠ − [٨٠° + ٨٠°] = ١٨٠° − ١٦٠ = ٢٠°

(٥)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، أ هـ // ب جـ

إثبت أن أ هـ ينصف ء أ ب



الحل

أ ب = أ جـ

∴ ق (ب) = ق (جـ) (١)

أ هـ // جـ ب

∴ ق (ء أ هـ) = ق (جـ) [متناظرتان] (٢)

∴ ق (هـ أ ب) = ق (ب) [متبادلتان] (٣)

من ١ ، ٢ ،٣ ينتج أن ق (ء أ هـ) = ق (هـ أ ب)

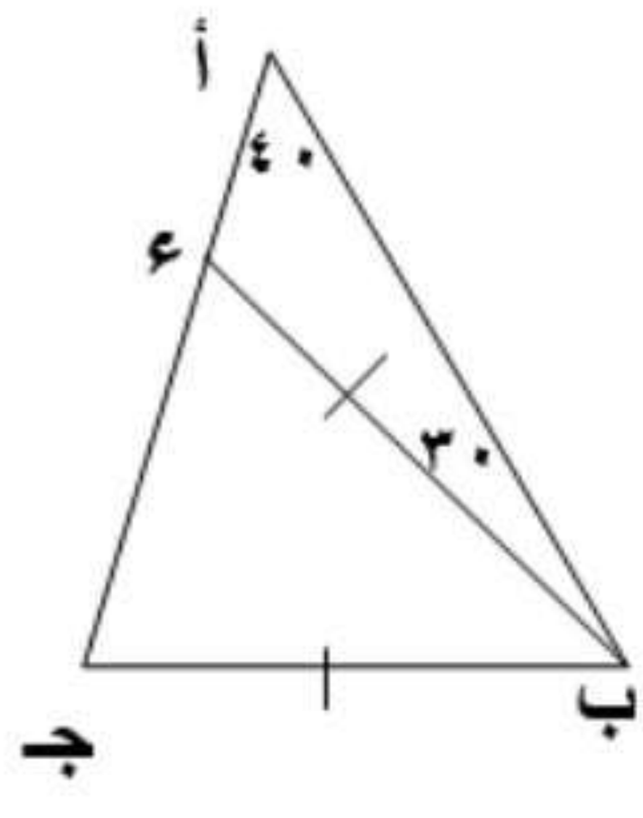
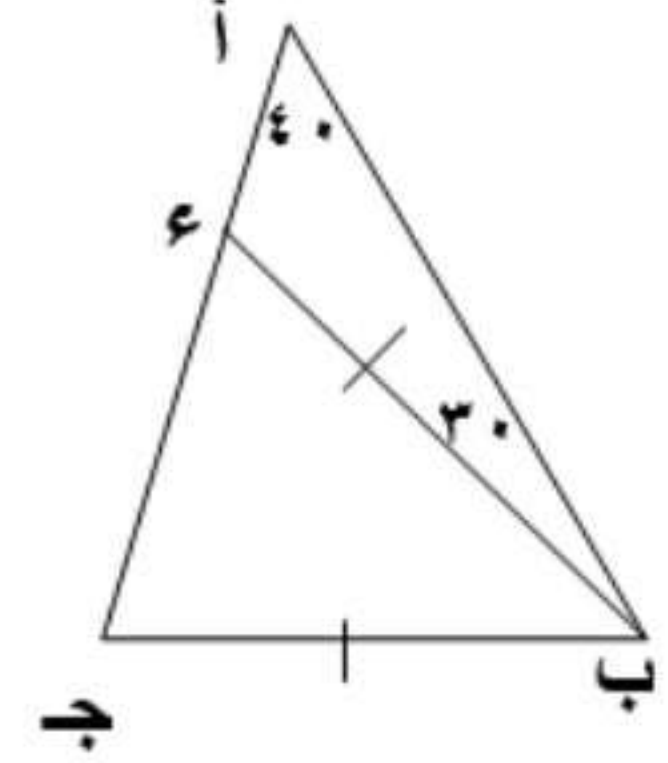
∴ أ هـ ينصف (ء أ ب)

(٦)

فى الشكل المقابل

ب ء = ب جـ

إوجد ق (ب جـ ء) ، ق (ء ب جـ)

الحل

ق (ب ء جـ) = ق(أ) + ق (أب ء)

لانها خارجة عن △ أب ء

∴ ق (ب ء جـ) = ٣٠+ ٤٠° = ٧٠°

ب ء = ب جـ

∴ ق(ب ء جـ) = ق (جـ) = ٧٠

∴ ق (ء ب جـ) = ١٨٠° - [٧٠° + ٧٠°] = ٤٠°

(٧)

فى الشكل المقابل

ق(أ) = ٥٠ ، أ ب = أ جـ

ء ب جـ متساوى الأضلاع

أوجد ق (أ ب ء)

الحل

فى Δ أ ب جـ

أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = $\frac{١٨٠-٥٠}{٢}$ = ٦٥

فى Δ ب جـ ء

ب ء = ء جـ = ب جـ

∴ ق (جـ ب ء) = ق (ب ء جـ) = ق (ء جـ ب) = ٦٠°

∴ ق (أ ب ء) = ٦٠ + ٦٥ = ١٢٥°

(٨)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ق(أ) = ٥س

ق (ب) = ٢س

أحسب قياسات زوايا Δ أ ب جـ

الحل

أ ب = أ جـ

ق (ب) = ق (جـ) = ٢س

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق (أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠°

٥س + ٢س + ٢ س = ١٨٠°

٩ س = ١٨٠°

س = ٢٠°

ق (أ) = ٥س = ٥ × ٢٠ = ١٠٠°

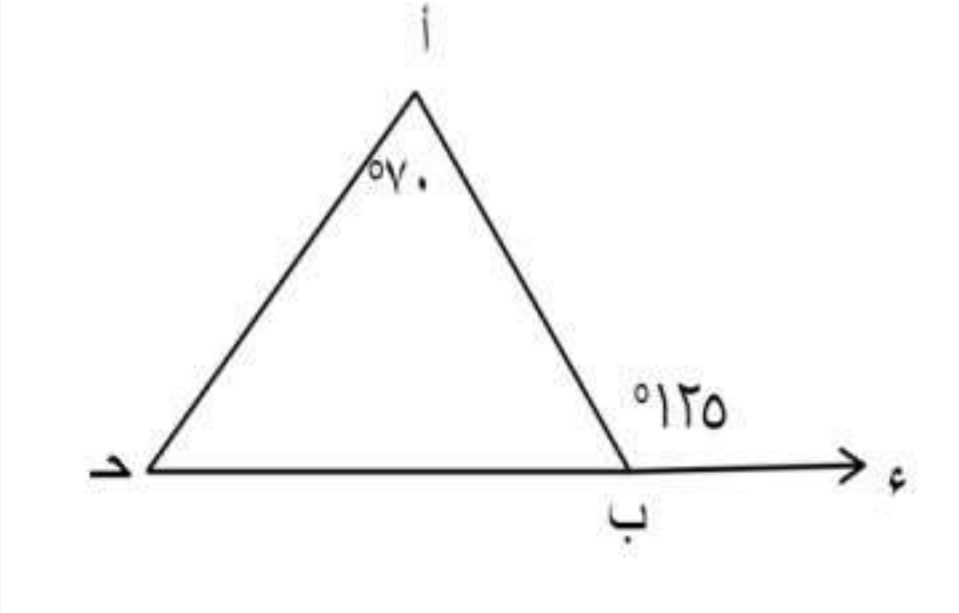
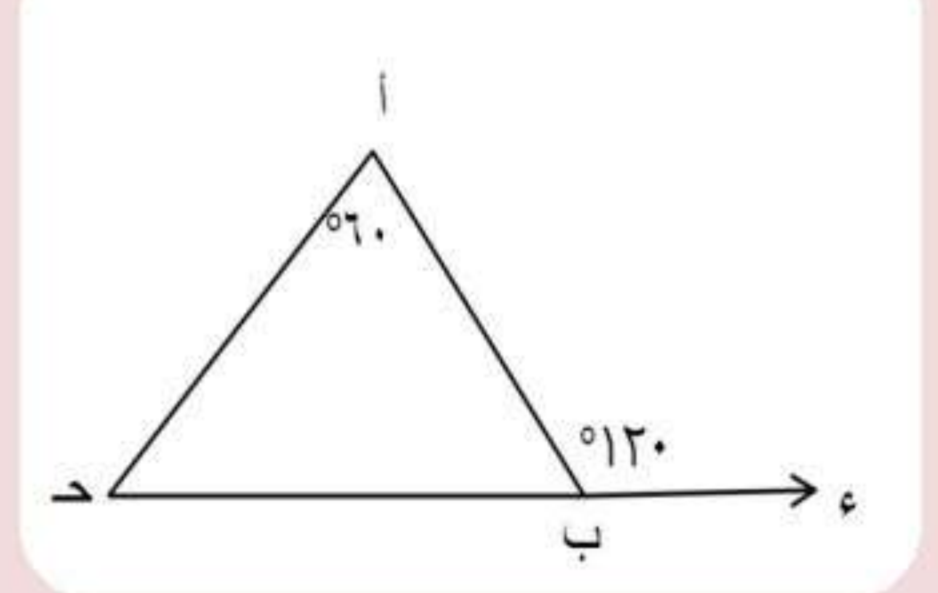
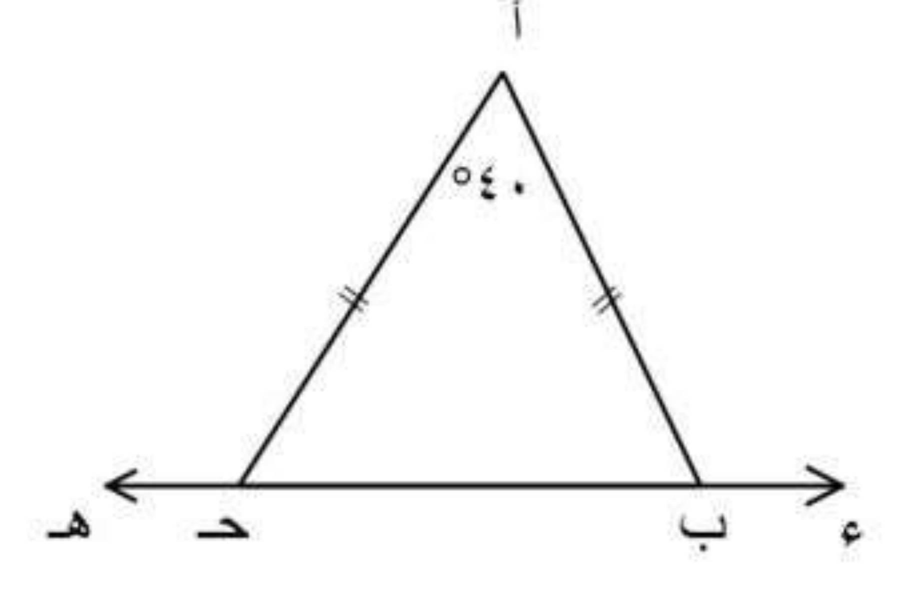
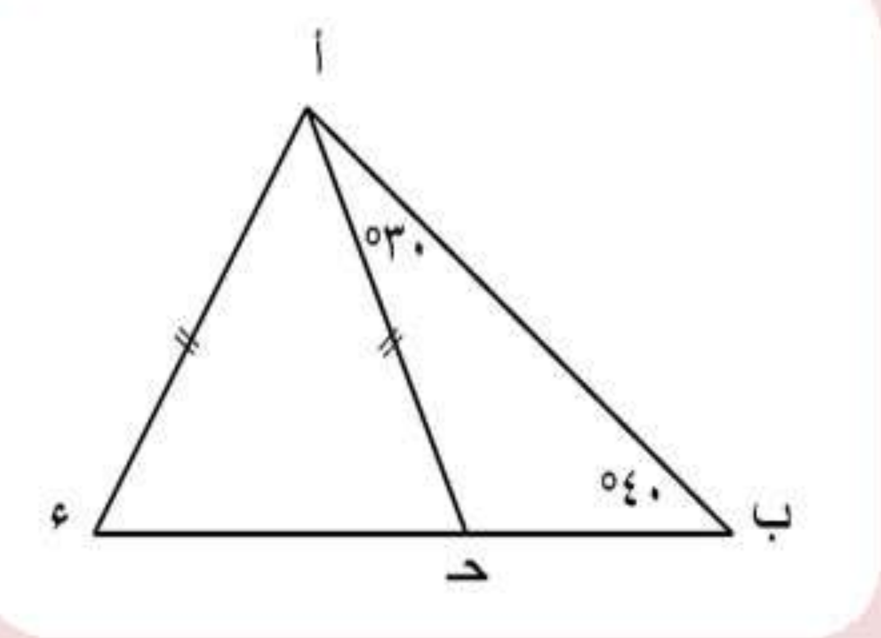
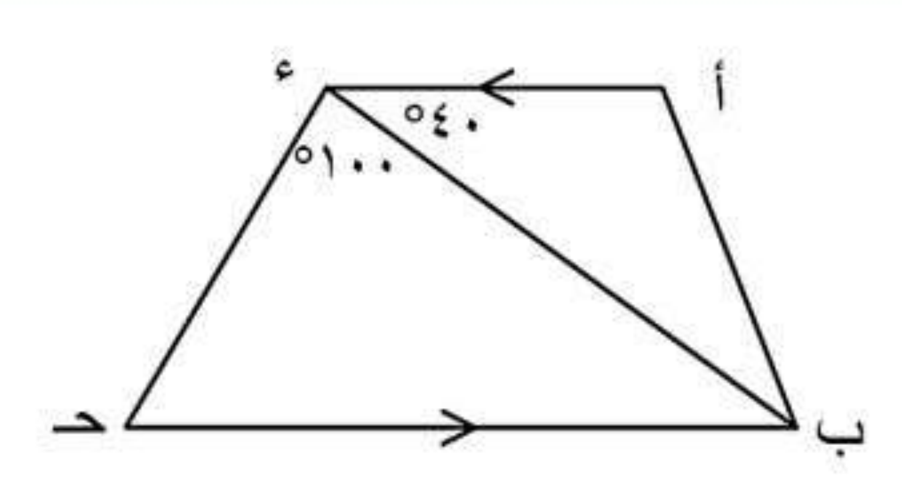
ق (ب) = ٢ س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

ق (جـ) = ٢س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

تمارين المثلث المتساوى الساقين (٣)

(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين تكونان	(١)	كل من زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين تكون...........
(٢)	قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع داخلة = ...°	(٢)	زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين قد تكون .... أو .... أو ....
(٣)	قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع الخارجة = ...°	(٣)	فى Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ , ق ($\hat{أ}$) = ٨٠ ° فإن ق ($\hat{ب}$) = ق (^) =...°
(٤)	Δ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ فإن ق (^) = ق (^)	(٤)	فى Δ أ ب جـ إذا كان ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) فإن Δ يكون .... الأضلاع
(٥)	فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان إحدى زوايتا القاعدة = ٤٠ ° فإن قياس زاوية القاعدة الأخرى = ...	(٥)	فى Δ س ص ع إذا كان س ص =ص ع = ع س فإن ق ($\hat{ص}$) الداخلة = ...°
(٦)	١) فى مثلث متساوى الساقين إذا كانت قياس زاوية رأسه = ١٠٠ ° فإن قياس زاوية قاعدته =.....°	(٦)	Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ , أ ب = أ جـ فإن ق ($\hat{ب}$) =...°
(٧)	فى المثلث المتساوى الساقين إذا كانت قياس إحدى زوايتا القاعدة = ٤٠ ° فإن قياس زاوية الرأس = ...	(٧)	قياس الزاوية الخارجة عند قاعدة المثلث المتساوى الساقين تكون ....

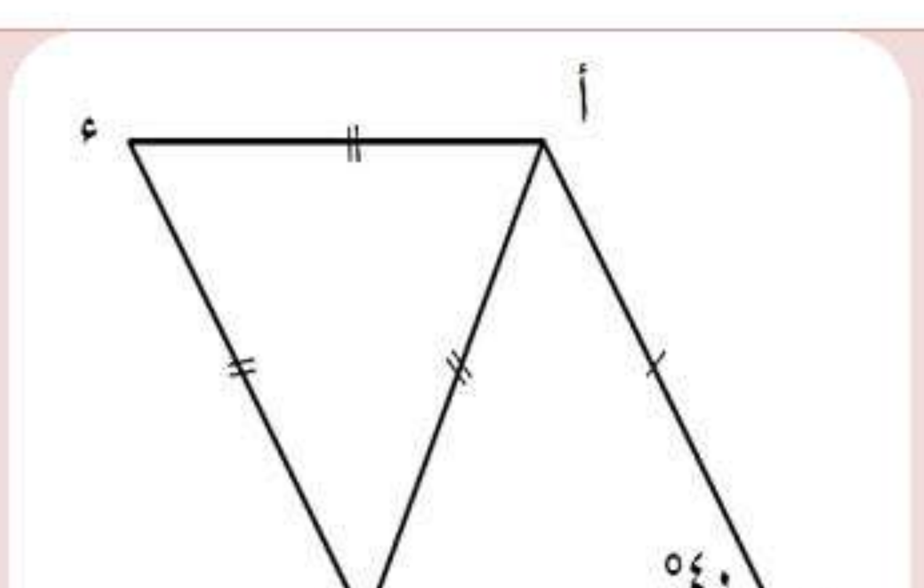
أسئلة مقالية

(١)	**فى الشكل المقابل** أثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين إذا كانت ق (أ̂) = ٧٠ ° , ق (ب̂) الخارجة = ١٢٥ ° 
(٢)	**فى الشكل المقابل** ق (أ̂) = ٦٠ ° ق (ب̂) = ١٢٠ ° أثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع 
(٣)	**فى الشكل المقابل** Δ أ ب جـ أب = أ جـ , ق (أ̂) = ٤٠ ° أوجد ١) ق (أ ب̂ جـ) ٢) إثبت أن (أ ب̂ ء) = (أ جـ̂ هـ) 
(٤)	**فى الشكل المقابل** ق (ب̂) = ٤٠ ° , ق (ب أ̂ جـ) = ٣٠ ° , أ جـ = أ ء أوجد بالبرهان ١) ق (ء̂) ٢) ق (جـ أ̂ ء) 
(٥)	**فى الشكل المقابل** أ ء // ب جـ ق (أ ء̂ ب) = ٤٠ ° , ق (جـ ء̂ ب) = ١٠٠ ° أثبت أن Δ ء ب جـ متساوى الساقين 

(٦) فى الشكل المقابل

أ ء = ء جـ = أ جـ , أ ب = ب جـ

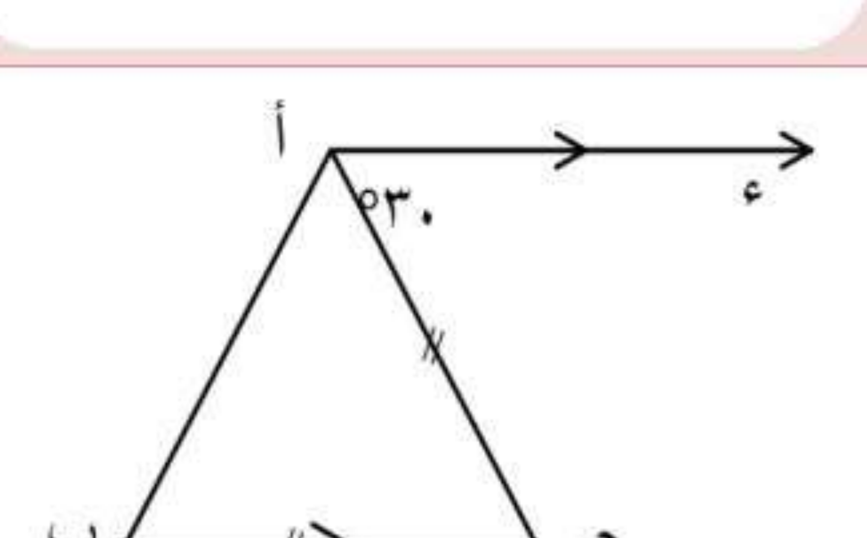
ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ٤٠ ° أوجد (ب$\hat{أ}$ ء)



(٧) فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{أء}$ // $\overline{ب جـ}$, (ء$\hat{أ}$ جـ) = ٣٠ °

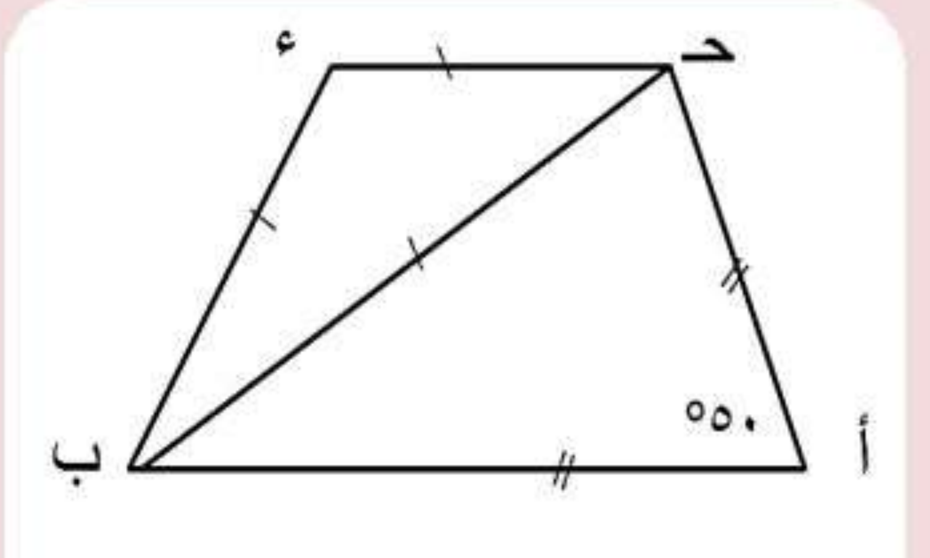
أ جـ = ب جـ أوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ



(٨) فى الشكل المقابل

ق ($\hat{أ}$) = ٥٠ ° , أ ب = أ جـ

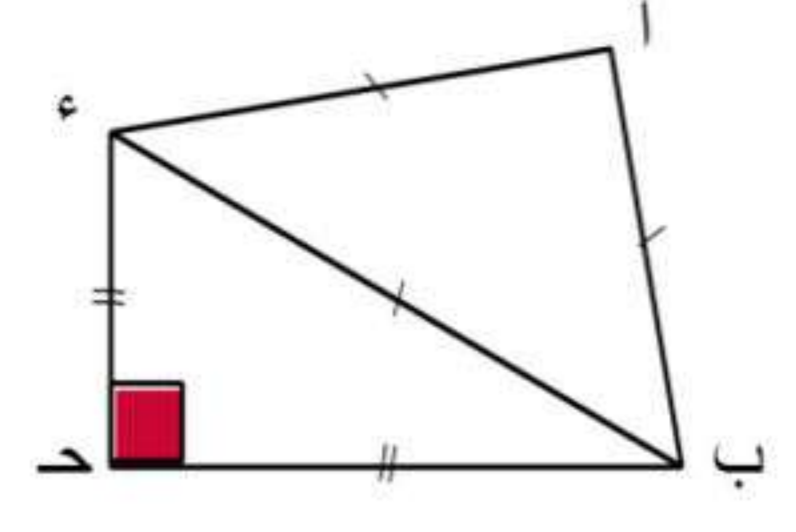
Δ ب ء جـ متساوى الأضلاع أوجد ق (أ$\hat{ب}$ ء)



(٩) فى الشكل المقابل

أ ب ء مثلث متساوى الأضلاع ب جـ = جـ ء ,

ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠ ° أوجد بالبرهان ق (أ$\hat{ب}$ جـ)

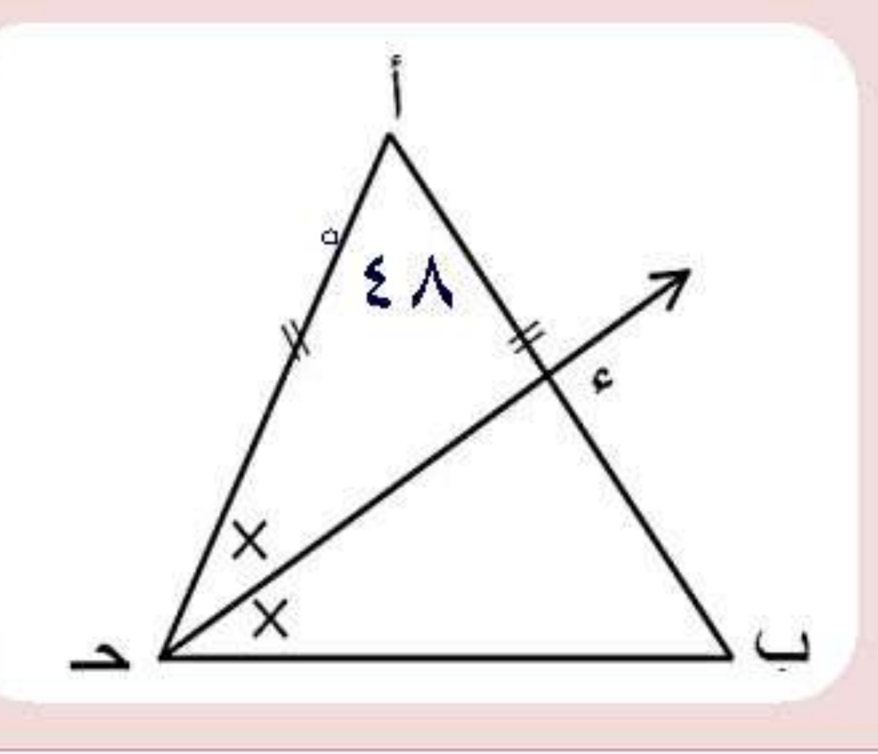


(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ , ق (ب$\hat{أ}$ جـ) = ٤٨°

, $\overleftarrow{جـ ء}$ ينصف (ب$\hat{جـ}$ أ) ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ء

أوجد ١) ق ($\hat{ب}$) ٢) ق (ب$\hat{جـ}$ ء)

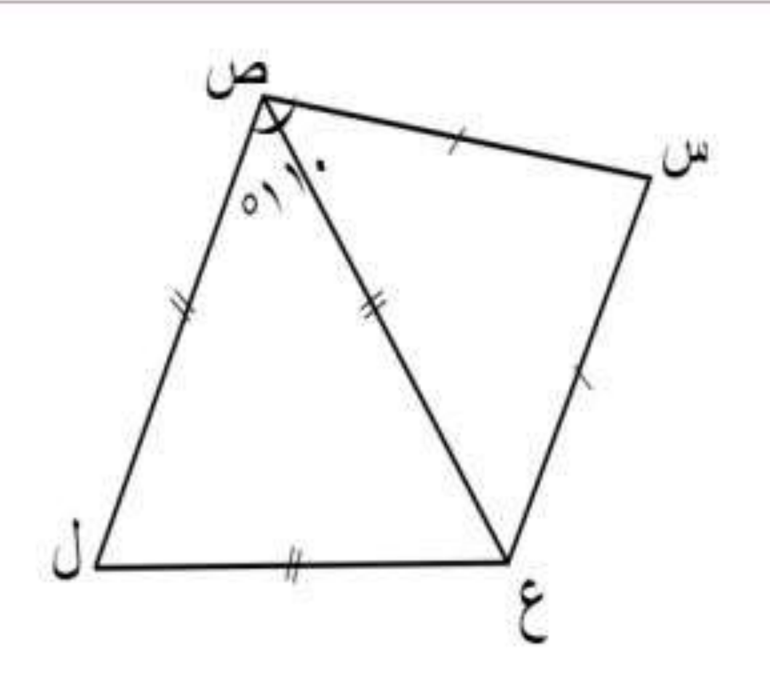


(١١) **فى الشكل المقابل**

س ص = س ع ، ص ع = ع ل = ص ل

ق (س ص ل) = ١١٠° أوجد

١) ق (س ص ع)   ٢) بالبرهان ق (س)

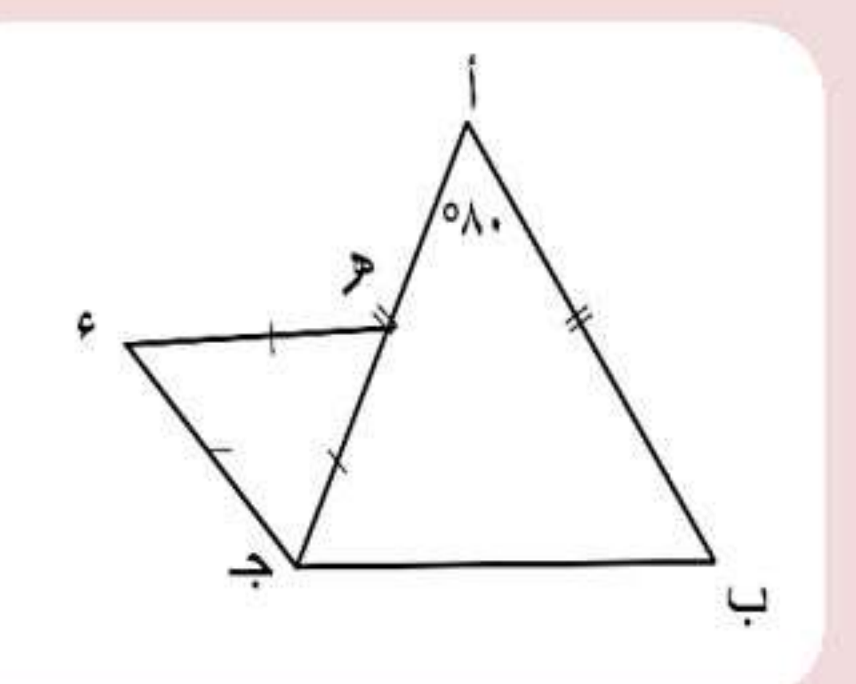


(١٢) **فى الشكل المقابل**

أ ب = أ جـ ، ق (ب أ جـ) = ٨٠°

جـ هـ = هـ ء = جـ ء أوجد بالبرهان

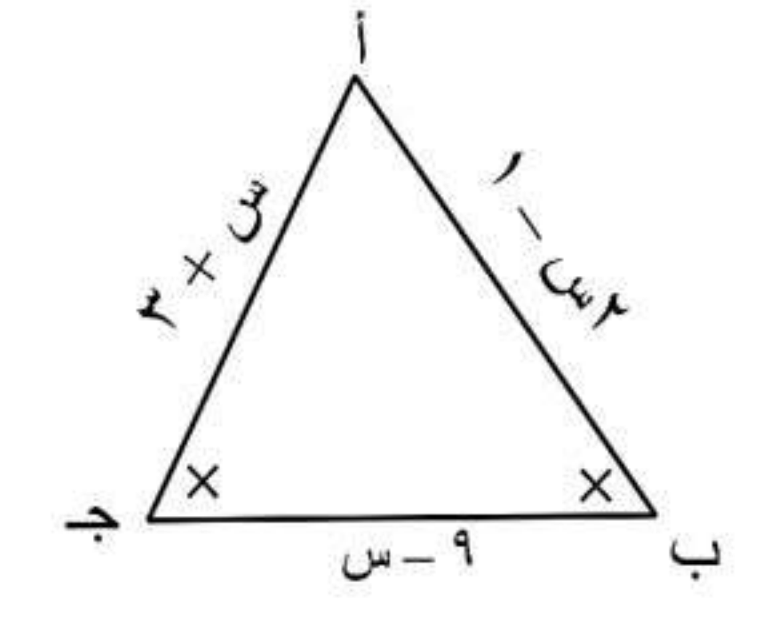
ق (ب جـ ء)



(١٣) **فى الشكل المقابل**

ق (ب) = ق (جـ)

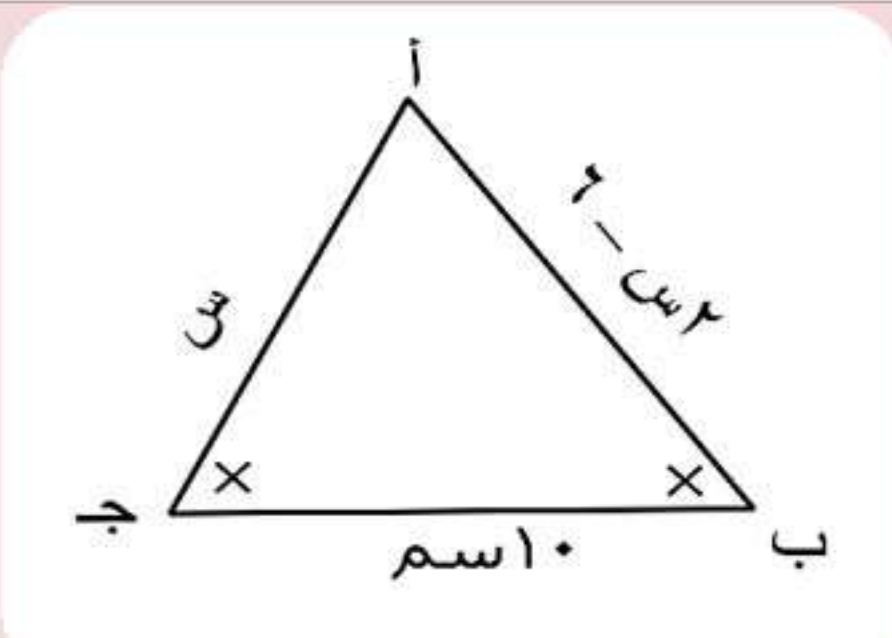
أوجد محيط Δ أ ب جـ



(١٤) **فى الشكل المقابل**

إحسب محيط Δ أ ب جـ

حيث أ ب = أجـ ، ب جـ = ١٠ سم

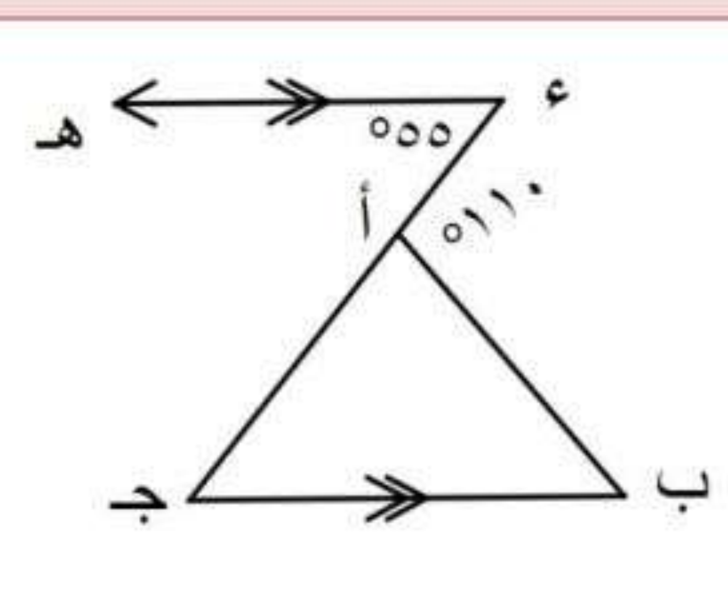


(١٥) فى الشكل المقابل

ء هـ // ب جـ ، ق (جـ ء هـ) = ٥٥° ،

ق (ب أ ء) = ١١٠°

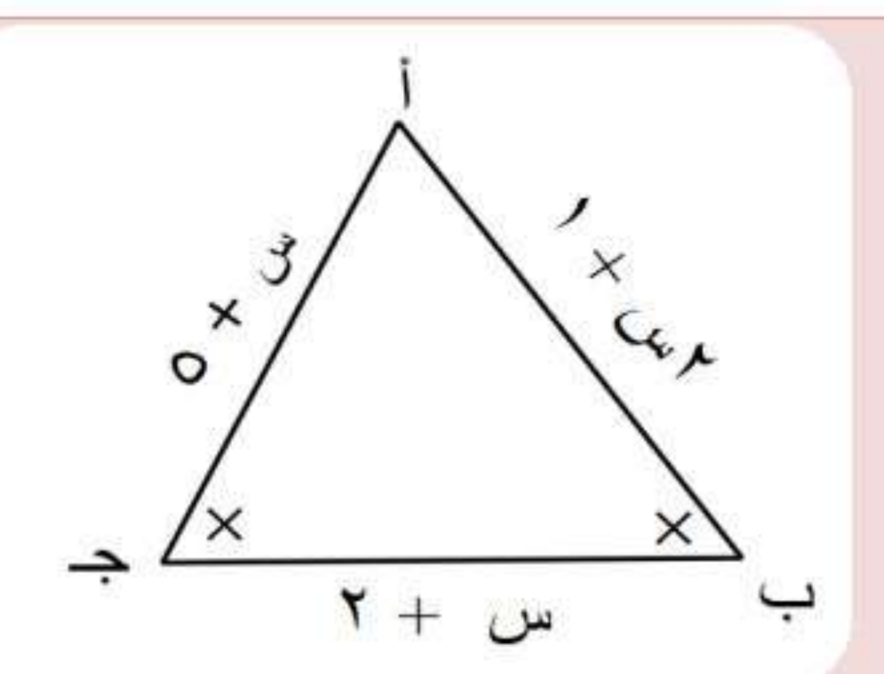
أثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الساقين



(١٦) فى الشكل المقابل

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

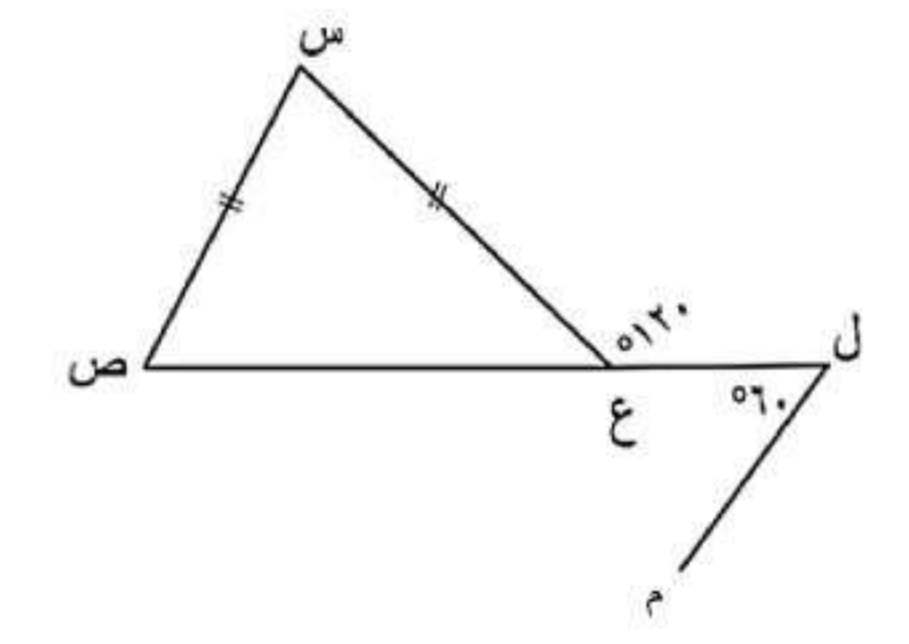
أوجد محيط Δ أ ب جـ



(١٧) فى الشكل المقابل

س ع = س ص , ق (ل $\hat{ع}$ س) = ١٢٠° ,

ق ($\hat{ل}$) = ٦٠° أثبت $\overline{س ص}$ // $\overleftarrow{ل م}$



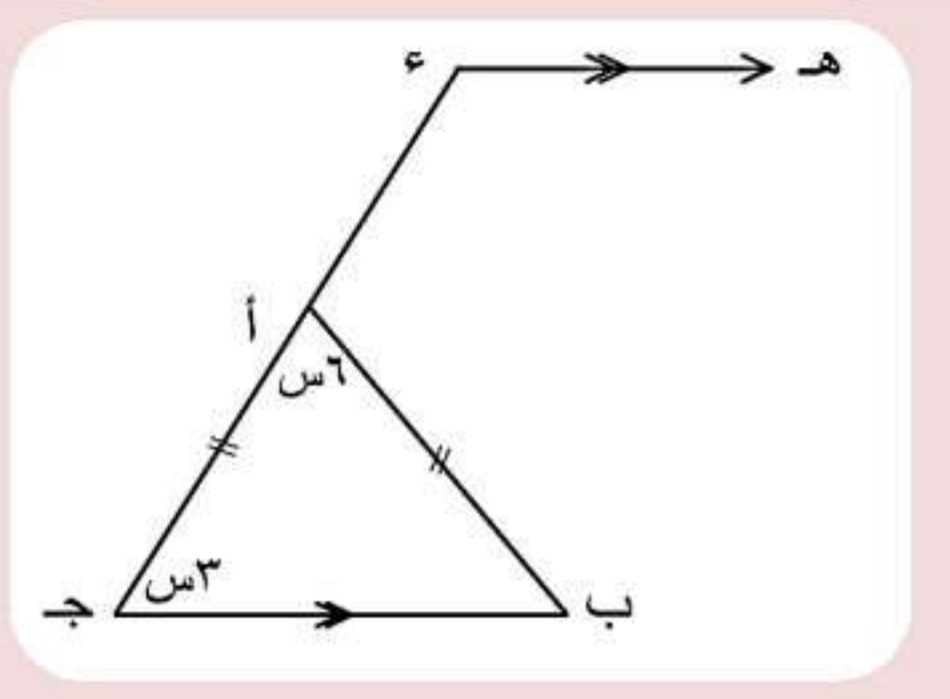
(١٨) فى الشكل المقابل

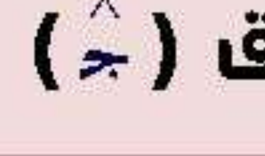
ق (ب $\hat{أ}$ س) = ٦ س , ق ($\hat{جـ}$) = ٣ س

أ ب = أ جـ , $\overleftarrow{هـ ء}$ // $\overline{جـ ب}$

أوجد بالبرهان

١) قيمة س ٢) ق (هـ $\hat{ء}$ أ) ٣) ق ($\hat{جـ}$)



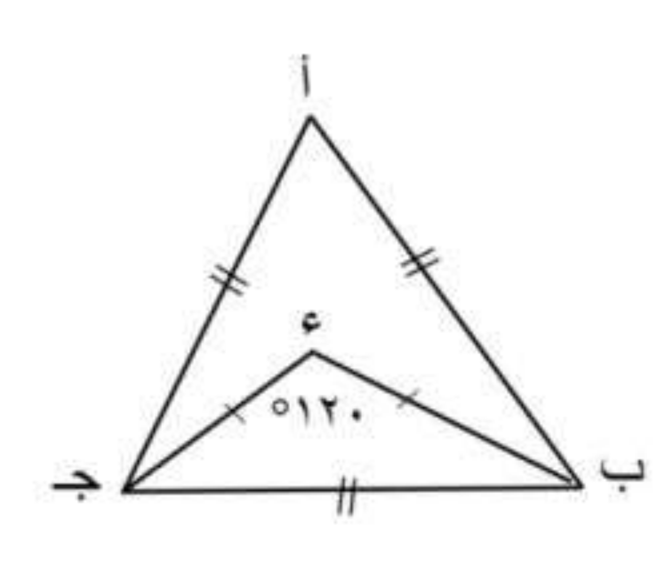


(١٩) فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع ب ء = ء جـ

ق (ب $\hat{ء}$ جـ) = ١٢٠°

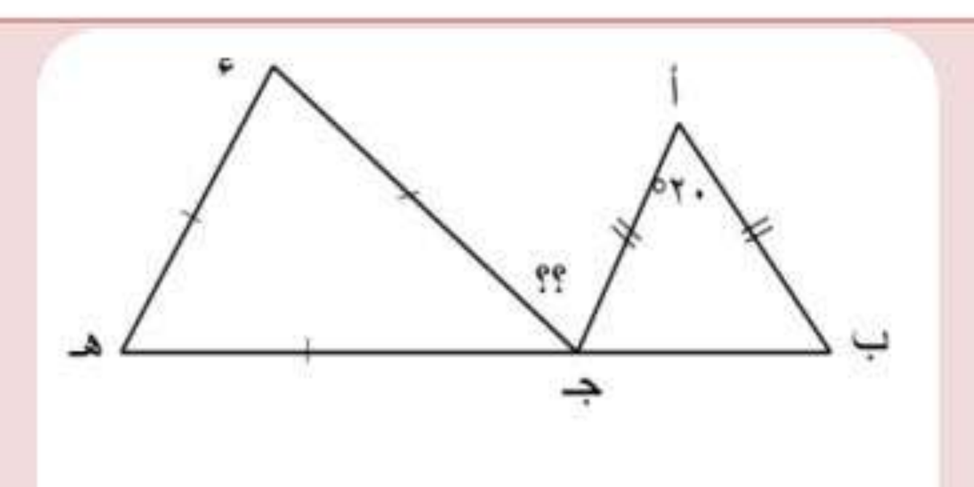
أوجد ق (أ $\hat{ب}$ ء)



(٢٠) من معطيات الشكل أ ب = أ جـ

, Δ ء جـ هـ متساوى الأضلاع

أوجد ق (أ $\hat{جـ}$ ء)





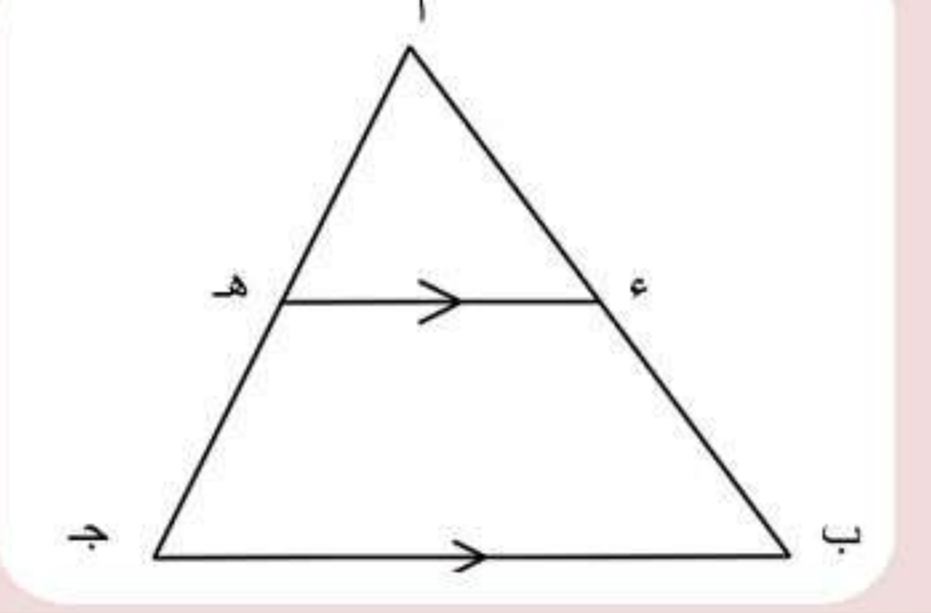
(٢١) **فى الشكل المقابل**

أ ب = أ جـ ، س ص // ب جـ

١) أ ثبت أن Δ أ س ص متساوى الساقين

٢) أثبت أن س ب = ص جـ

(٢٢) **فى الشكل المقابل**



ء هـ // ب جـ ، أ ء = أ هـ

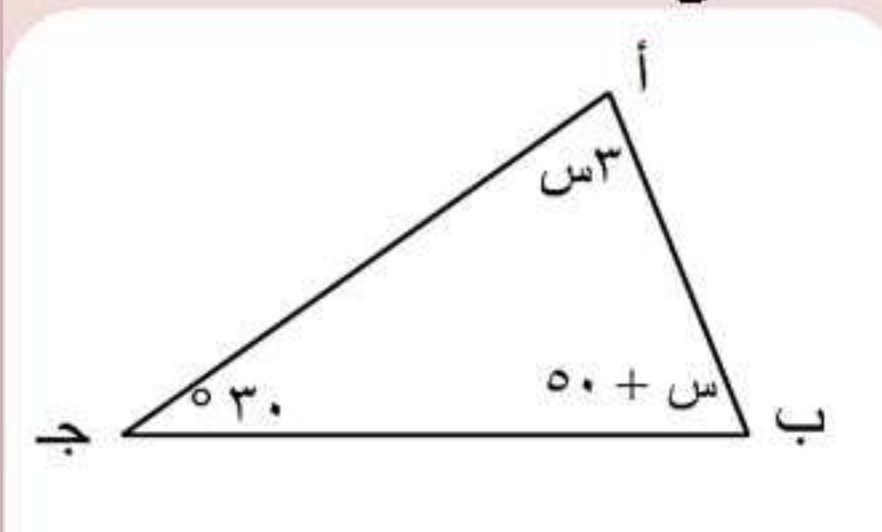
١) إثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الساقين

٢) أ ثبت أن ب ء = هـ جـ

(٢٣) أ ب جـ مثلث فيه ء ∈ أ ب ، هـ ∈ ب جـ بحيث كان ب ء = ب هـ

فإذا كان ء هـ // أ جـ أثبت أن أ ب = ب جـ

(٢٤) إذكر الضلعان المتساويان فى Δ أ ب جـ من معطيات الشكل



الدرس الرابع

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة ١

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة

ففى الشكل المقابل

إذا كان أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ , أ ء متوسط

فإن

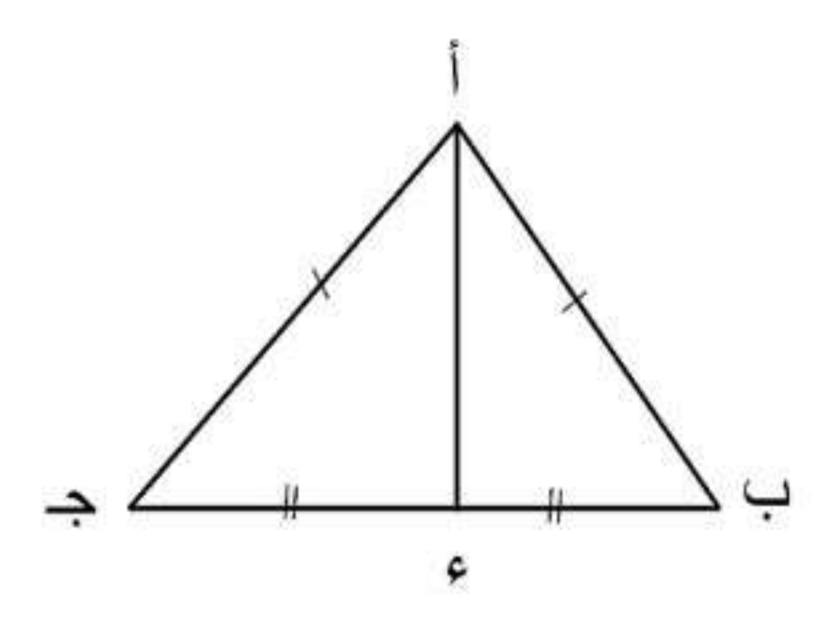
١) أ ء ينصف (ب أ جـ) أى أن ق (ب أ ء) = ق (جـ أ ء)

٢) أ ء ⊥ ب جـ

نتيجة ٢

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها

ففى الشكل المقابل



إذا كان أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ,

أ ء ينصف (ب أ جـ) فإن

١) ء منتصف ب جـ أى أن ب ء = جـ ء

٢) أ ء ⊥ ب جـ

نتيجة ٣

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

محور تماثل القطعة المستقيمة :- هو المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها .

خاصية

- أى نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفها
- عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع ٣
- عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ١
- عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع صفر
- المربع له ٤ محاور تماثل
- المستطيل له ٢ محور تماثل
- متوازى الأضلاع ليس له محاور تماثل
- شبه المنحرف المتساوى الساقين له محور واحد
- مثلث متساوى الساقين وإحدى زواياه ٦٠° فإن عدد محاور تماثله= ٣ محاور
- عدد متوسطات المثلث المتساوى الأضلاع أو المتساوى الساقين أو مختلف الأضلاع ٣ متوسطات

أمثلة

(١)

فى الشكل المقابل

إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

الحل

ق(أ ب̂ جـ) + ق(هـ ب̂ جـ) = ١٨٠

ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠

ق(أ جـ̂ ب) + ق (أ جـ ء) = ١٨٠

ق(أ جـ̂ ب) = ١٨٠° – ١٢٠ = ٦٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

ق (أ̂) = ١٨٠ – [٦٠ + ٦٠°] = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

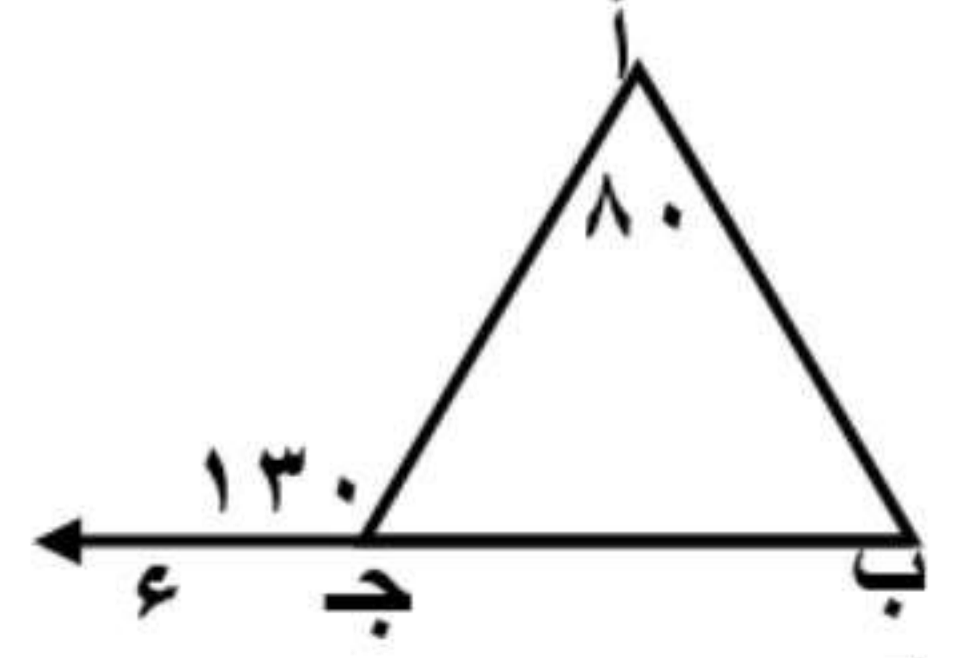
ق (أ̂) = ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب)

△ أ ب جـ متساوى الأضلاع

(٢)

فى الشكل المقابل

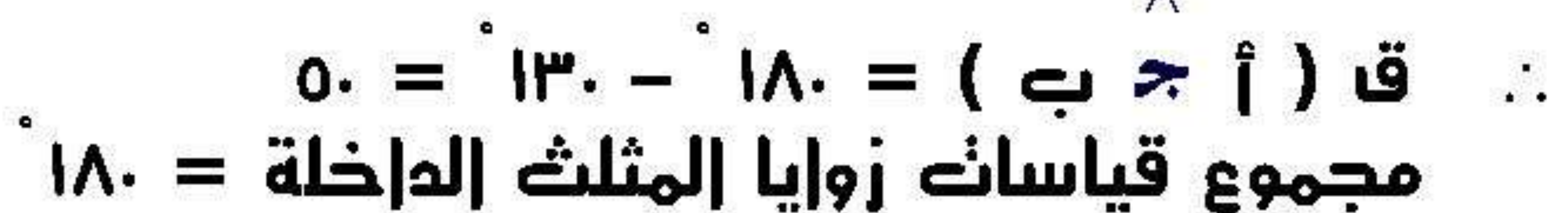
إثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين



الحل

ق (أ جـ̂ ب) + ق (أ جـ̂ ء) = ١٨٠

[متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]



∴ ق (أ جـ̂ ب) = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ب̂) = ١٨٠° – [٨٠° + ٥٠] = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

ق (ب̂) = ق (أ جـ̂ ب) = ٥٠°

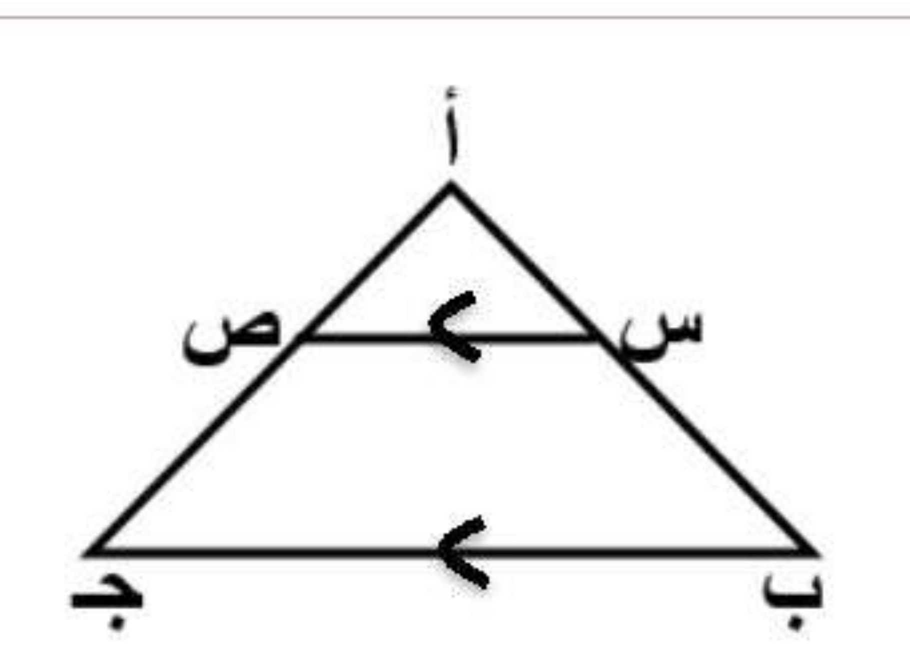
∴ أ ب = ب جـ [المثلث متساوى الساقين]

(٣)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن Δ أ س ص متساوى الساقين



الحل

فى Δ أ ب جـ

أ ب = أ جـ

∴ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) (١)

س ص // ب جـ

∴ ق(أ $\hat{\text{س}}$ ص) = ق ($\hat{\text{ب}}$) [بالتناظر]

∴ ق(أ $\hat{\text{ص}}$ س) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) [بالتناظر]

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

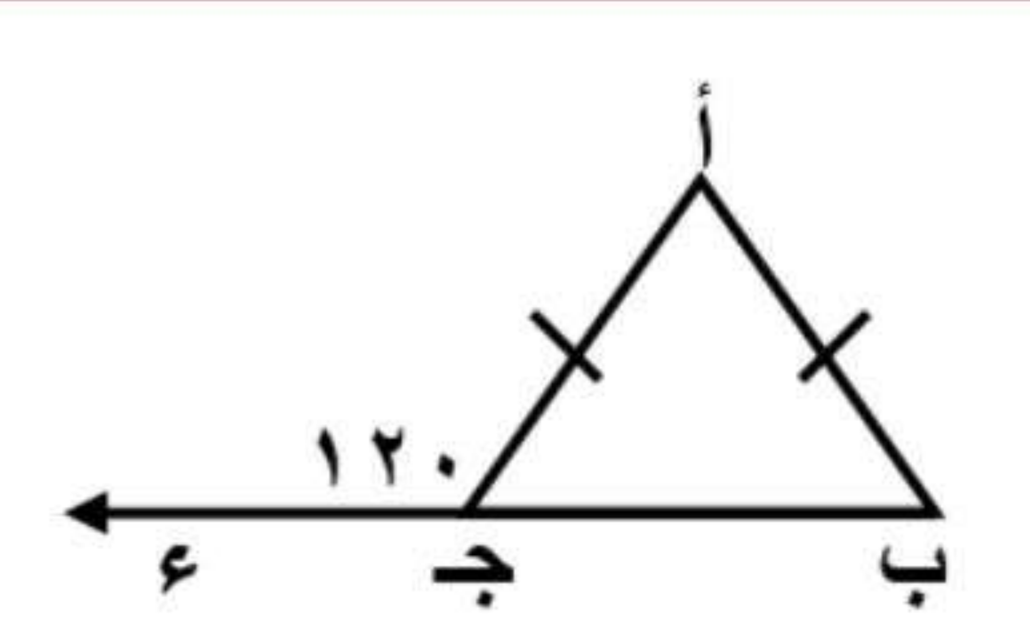
ق(أ $\hat{\text{س}}$ ص) = ق (أ $\hat{\text{ص}}$ س)

∴ Δ أ س ص متساوى الساقين

(٤)

فى الشكل المقابل

إثبت ان Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع



الحل

ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ء) + ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ١٨٠

∴ ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠°

فى Δ أ ب جـ

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٦٠

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ١٨٠° – [٦٠° + ٦٠°] = ٦٠

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب)

∴ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

(٥)

فى الشكل المقابل أ ب = أ جـ

ب ء ⃖ ينصف ∠ أ ب جـ

جـ ء ⃖ ينصف ∠ أ جـ ب

إثبت أن Δ ء ب جـ متساوى الساقين

الحل

أ ب = أ جـ

∴ ق (ب̂) = ق (جـ̂) (١)

ب ء ⃖ ينصف أ ب جـ

∴ ق(ء ب̂ جـ) = ١/٢ ق(ب̂) (٢)

جـ ء ⃖ ينصف أ جـ ء

∴ ق (ء جـ̂ ب) = ١/٢ ق (جـ̂) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق (ء ب̂ جـ) = ق (ء جـ̂ ب)

∴ Δ ء ب جـ متساوى الساقين

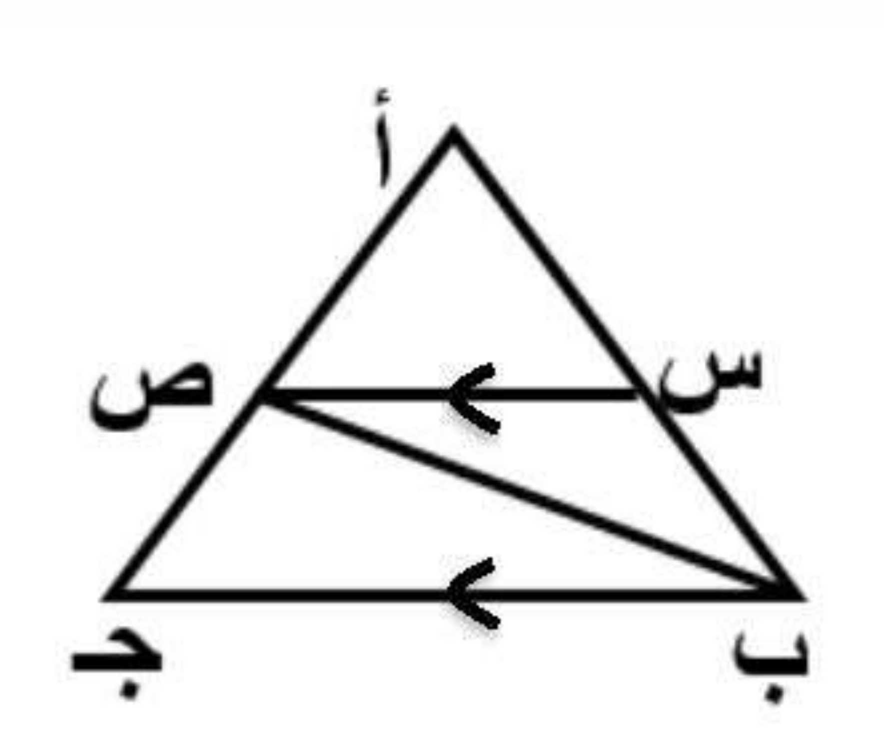
(٦)

فى الشكل المقابل

س ص // ب جـ

ب ص ⃖ ينصف (أ ب̂ جـ)

إثبت أن Δ س ب ص متساوى الساقين



الحل

س ص // ب جـ

∴ ق(س ص̂ ب) = ق (ص ب̂ جـ) (١)

ب ص ⃖ ينصف ∠ أب جـ

∴ ق (س ب̂ ص) = ق (ص ب̂ جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

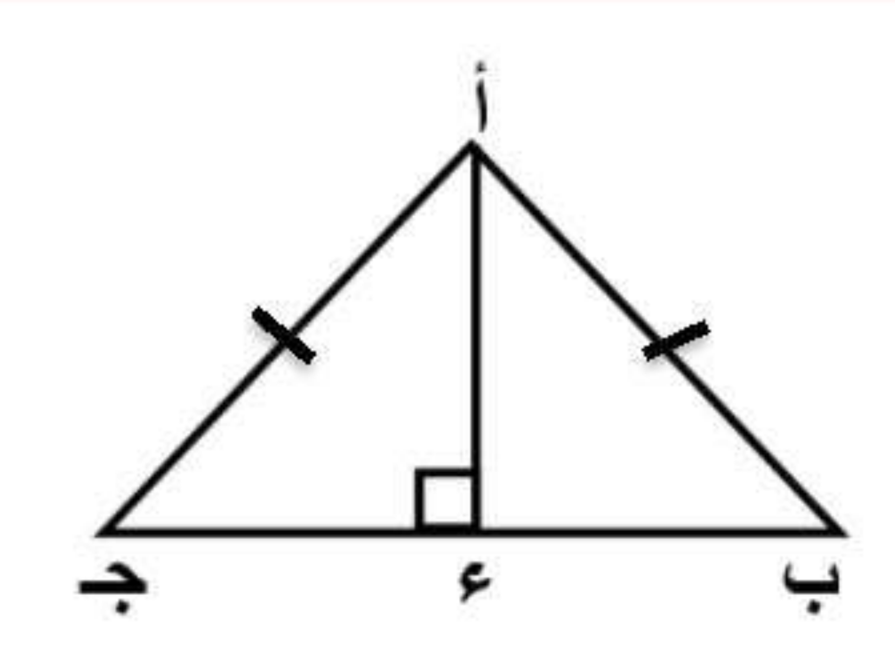
ق(س ص̂ ب) = ق (س ب̂ ص)

∴ Δ س ب ص متساوى الساقين

أمثلة

(١)

فى الشكل المقابل



أ ب = أ جـ ، ق(ب $\hat{أ}$ ء) = ٢٥
أ ء ⊥ ب جـ ، ب جـ = ٦سم
أوجد

(١) طول ء جـ (٢) ق (أ $\hat{جـ}$ ب)

الحل

أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ
أ ء متوسط
ب ء = ء جـ = ٣سم
أ ء ينصف (ب $\hat{أ}$ جـ)

ق (ب $\hat{أ}$ ء) = ق (جـ $\hat{أ}$ ء) = ٢٥
مجموع قياسات زوايا △ أ ء جـ = ١٨٠
ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − [٩٠° + ٢٥] = ٦٥

(٢)

فى الشكل المقابل ب ء = هـ جـ ، ق (أ $\hat{ء}$ هـ) = ق(أ $\hat{هـ}$ ء)
إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الساقين

أ
ب ء هـ جـ

الحل

ق (أ $\hat{ء}$ هـ) = ق (أ $\hat{هـ}$ ء)
أ ء = أ هـ

ق (أ $\hat{ء}$ ب) = ق (أ $\hat{هـ}$ جـ)
[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]
△ △ أ ب ء ، أ هـ جـ
ب ء = هـ جـ
فيهما أ ء = أ هـ

ق (أ $\hat{ء}$ ب) = ق (أ $\hat{هـ}$ جـ)
△ أ ب ء ≡ △ أ جـ هـ
أ ب = أ جـ △ أ ب جـ متساوى الساقين

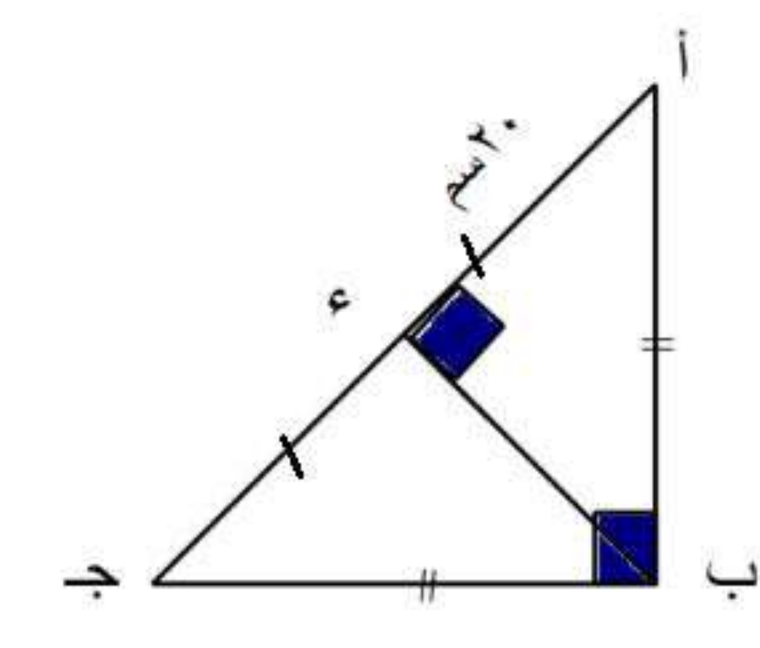
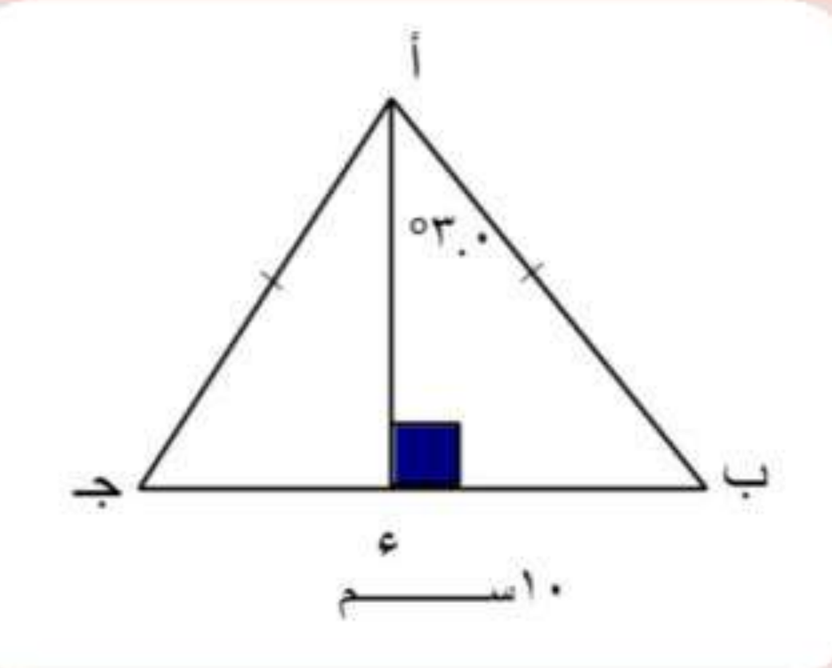
تمارين نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين (٤)

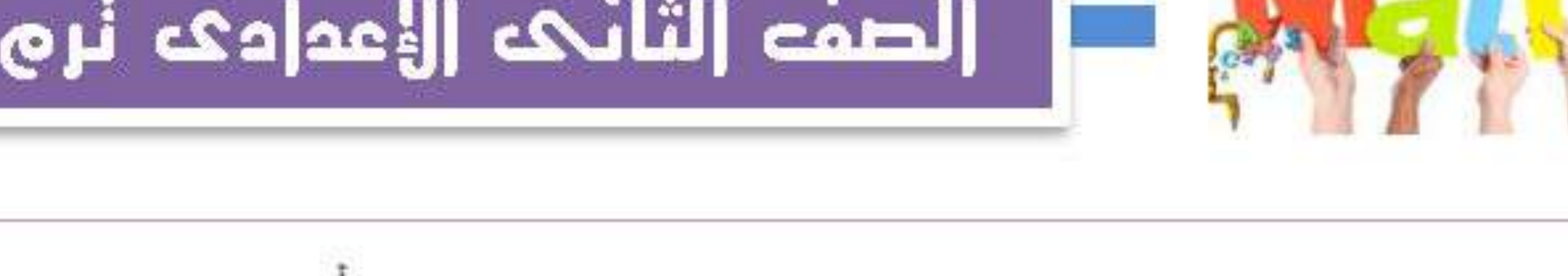
(١) أكمل ما يأتى

(١)	عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع	(١)	إذا كان Δ أ ب جـ له محور تماثل واحد وفيه ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ١٢٠° فإن ق ($\hat{أ}$) = ...
(٢)	عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع	(٢)	إذا كان Δ س ص ع له محور تماثل واحد وفيه ق ($\hat{ص}$) = ١٠٠° فإن ق ($\hat{ع}$) = ... °, ق ($\hat{س}$) =...
(٣)	عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين	(٣)	المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى ....
(٤)	عدد متوسطات Δ متساوى الأضلاع	(٤)	المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديا على القاعدة ....
(٥)	عدد متوسطات Δ مختلف الأضلاع	(٥)	قياس الزاوية الخارجة فى المثلث المتساوى الأضلاع = ...
(٦)	٣)عدد متوسطات Δ متساوى الساقين................	(٦)	إذا كان Δ أ ب جـ فيه ق ($\hat{أ}$) =٥٠° , ق($\hat{ب}$) =٦٠°,ق($\hat{جـ}$)=٧٠° فإن عدد محاور تماثل Δ أ ب جـ = ...
(٧)	مثلث متساوى الساقين إحدى زواياه ٦٠° فإن عدد محاور تماثله	(٧)	إذا كان Δ أ ب جـ فيه ق ($\hat{أ}$)= ٧٠° , ق ($\hat{ب}$) = ٥٥° فإن عدد محاور تماثل Δ أ ب جـ = ...

(٨)	محور تماثل القطعة المستقيمة هو	(٨)	أ ب جـ مثلث متساوى الساقين ق ($\hat{أ}$) = ٦٠° فإن عدد محاور تماثل Δ أ ب جـ =..............
(٩)	أى نقطة و تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفها	(٩)	في Δ أ ب جـ إذا كان أب =أ جـ,ق ($\hat{أ}$)= ٦٠° فإن عدد محاور تماثل Δ أ ب جـ = ...
(١٠)	إذا كانت جـ تنتمى إلى محور تماثل القطعة $\overline{أ ب}$ فإن .... =......	(١٠)	إذا كان إحدى زوايا Δ أ ب جـ ٤٥° وكان قائم الزاوية فإن عدد محاور تماثله هو.....................

أسئلة مقالية

(١)	**فى الشكل المقابل** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ومتساوى الساقين $\overline{ب ء}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$, $\overline{أ ء}$ = ٢٠ سم ١) أوجد طول $\overline{أ جـ}$  ٢) ق (ء $\hat{ب}$ جـ) ٣) أثبت أن Δ ب ء جـ متساوى الساقين
(٢)	**فى الشكل المقابل** أ ب = أ جـ , ب جـ = ١٠ سم , ق (ب $\hat{أ}$ ء) = ٣٠° $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ أوجد ١) طول كل من $\overline{ب ء}$, $\overline{أ ء}$  ٢) ماهو عدد محاور تماثل المثلث أ ب جـ ٣) مساحة Δ أ ب جـ



(٣) **فى الشكل المقابل**

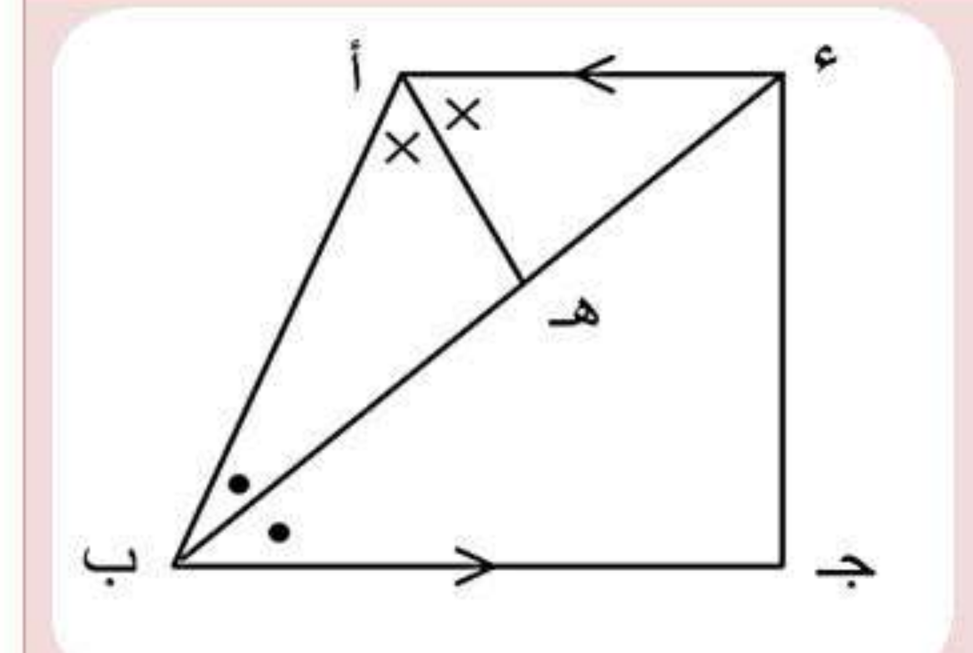
أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ،

أ هـ ينصف (ب أ̂ جـ) أ هـ ∩ ب جـ = {هـ} ،

ء ∈ أ هـ برهن أن

١) ب هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ　　　٢) ب ء = جـ ء

(٤) **فى الشكل المقابل**



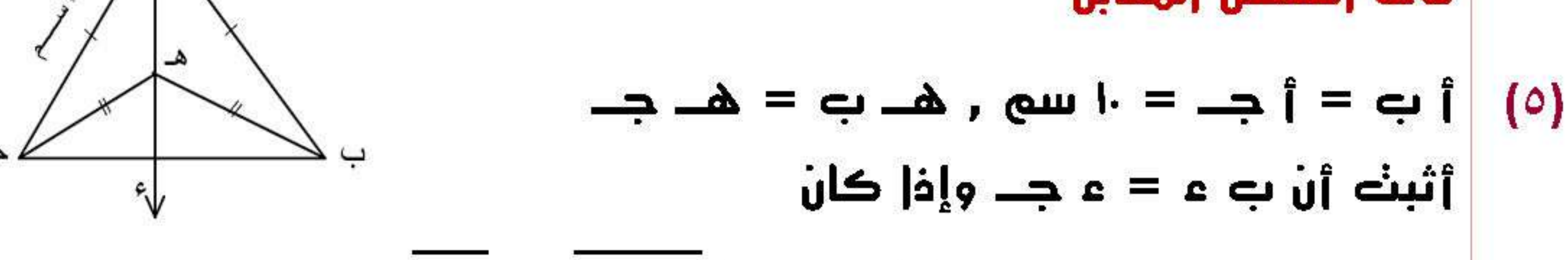
أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ء // ب جـ ،

ب ء ينصف (أ ب̂ جـ) ، أ هـ ينصف (ب أ̂ ء)

أثبت أن

١) أ ب = أ ء　　　٢) أ هـ ⊥ ب ء　　　٣) ب هـ = هـ ء

(٥) **فى الشكل المقابل**

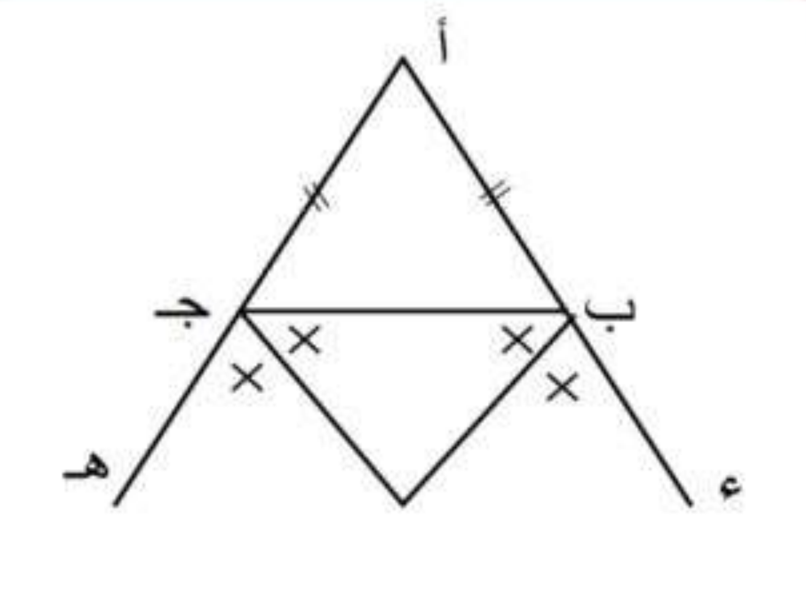


أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ جـ

أثبت أن ب ء = ء جـ وإذا كان

ب جـ = ٨ سم أوجد طول كل من جـ ء ، أ ء

(٦) **فى الشكل المقابل**



أ ب = أ جـ ، ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ جـ ،

ب و ينصف (ء ب̂ جـ) ، جـ و ينصف (ب جـ̂ هـ)

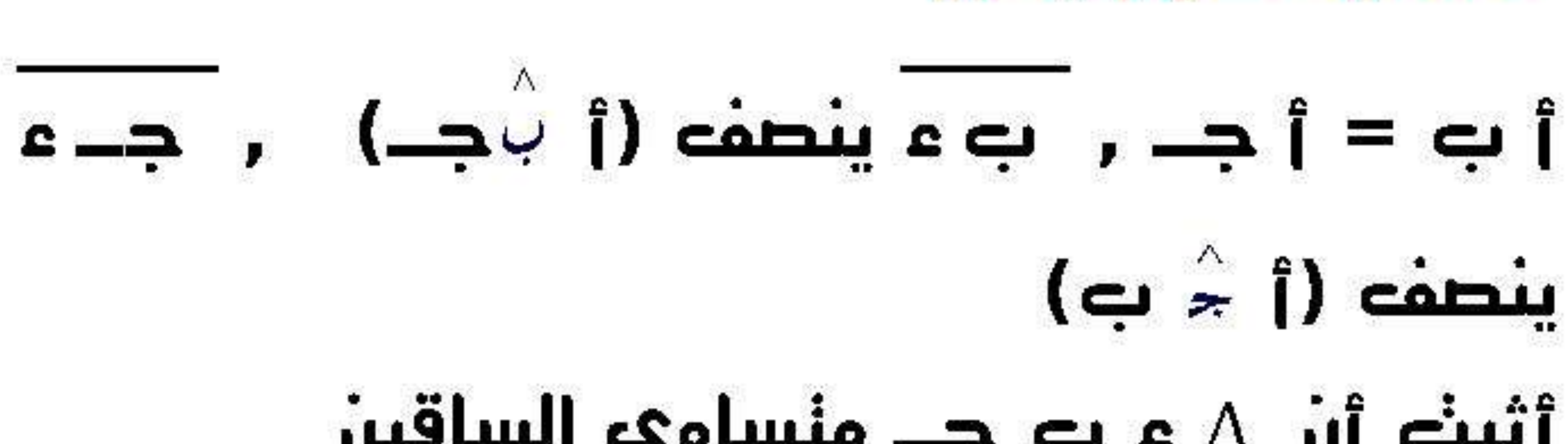
أثبت أن

١) Δ ب و جـ متساوى الساقين　　　٢) أ و محور تماثل ب جـ

(٧)

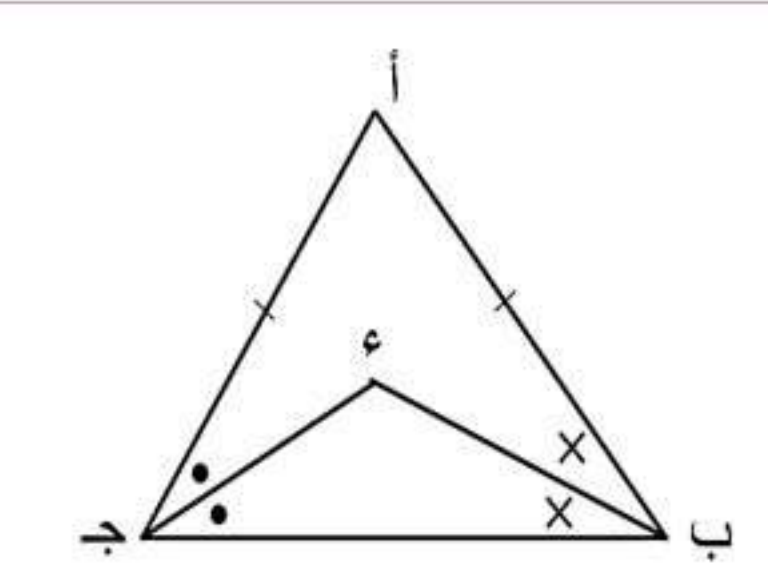


فى الشكل المقابل



أ ب = أ جـ , ب ء ينصف (أ $\hat{ب}$ جـ) , جـ ء ينصف (أ $\hat{جـ}$ ب)

أثبت أن Δ ء ب جـ متساوى الساقين



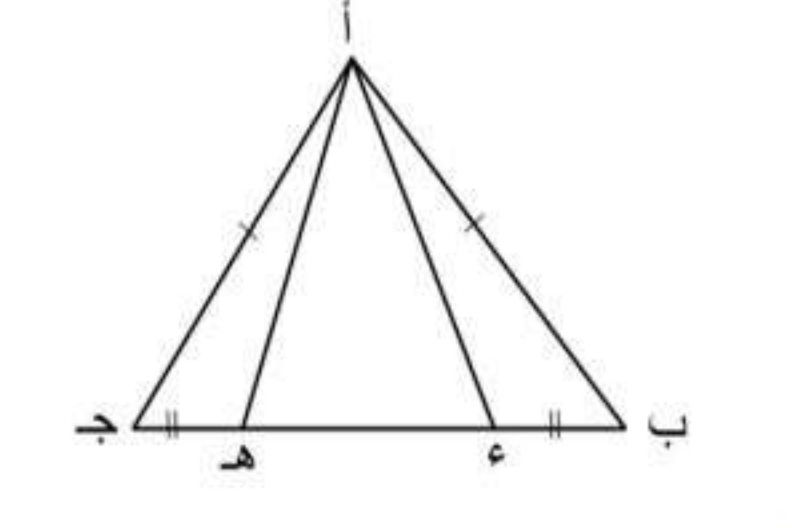
(٨)

فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب = أ جـ , ب ء = هـ جـ

١) أثبت أن Δ أ ء هـ متساوى الساقين

٢) أ ثبت أن ق (أ ء هـ) = ق (أ هـ ء)

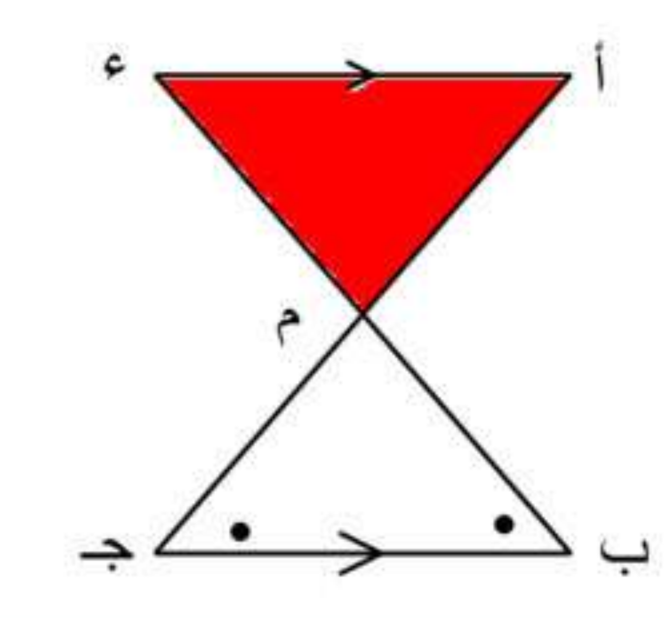


(٩)

فى الشكل المقابل

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) أ ء // ب جـ

أثبت أن Δ أ م ء متساوى الساقين



(١٠)

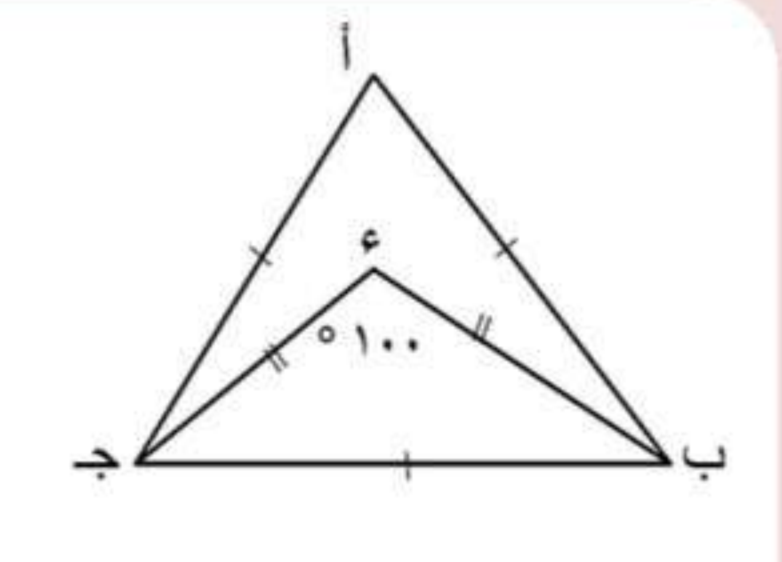
فى الشكل المقابل



Δ ء ب جـ متساوى الساقين ,

أ ب جـ متساوى الأضلاع ق ($\hat{ء}$) = ١٠٠°

أوجد بالبرهان ق (أ $\hat{ب}$ ء)



(١١)

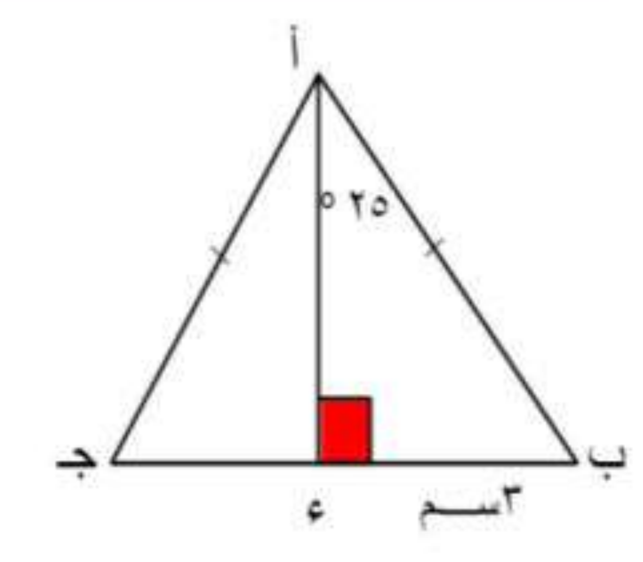
فى الشكل المقابل

Δ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ أ ء ⊥ ب جـ ,

ق (ب $\hat{أ}$ ء) = ٢٥° ب ء = ٣ سم

أوجد

١) ق (جـ $\hat{أ}$ ء) ٢) ق ($\hat{ب}$) ٣) طول ء جـ ٤) طول ب جـ



الدرس الأول

(التباين)
المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

نتيجة ١

لأى أربعة أعداد أ , ب , جـ , ء

١) إذا كان أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ

٢) إذا كان أ > ب فإن أ - جـ > ب - جـ

٣) إذا كان أ > ب فإن أ × جـ > ب × جـ ← إذا كان جـ عدد موجب

٤) إذا كان أ > ب فإن أ × جـ < ب × جـ ← إذا كان جـ عدد سالب

٥) إذا كان أ > ب , ب > جـ فإن أ > جـ

٦) إذا كان أ > ب , جـ > ء فإن أ + جـ > ب + ء

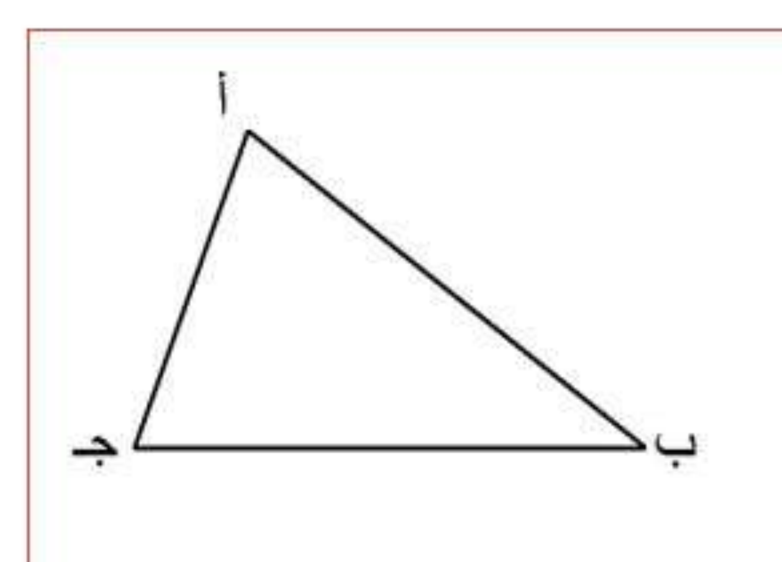
٧) إذا كان أ > ب فإن - أ > - ب

٨) إذا كان أ > ب فإن $\frac{١}{أ}$ > $\frac{١}{ب}$

نتيجة

قياس الزاوية الخارجة عن أى رأس من رءوس المثلث أ كبر من قياس أى زاوية داخلة ماعدا المجاورة لها

نتيجة ٣



إذا إختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرها فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للاخر

ففى الشكل المقابل



نتائج هامة

١) أكبر أضلاع المثلث طولا يقابل أكبر الزوايا قياس (الزاوية أكبر من ٦٠°)

٢) أصغر أضلاع المثلث طولا يقابل أصغر الزوايا قياس (الزاوية أصغر من ٦٠°)

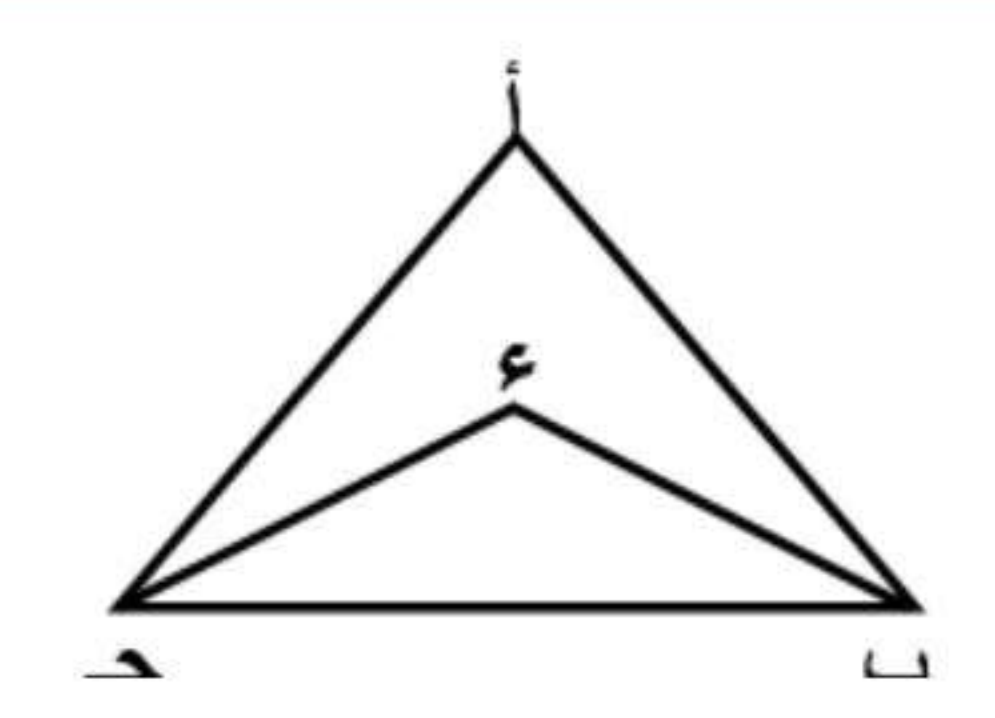
٣)الوتر هو أكبر أضلاع المثلث القائم

٤) إذا كان أ ب > ب جـ > أ جـ

فإن ق (^) > ق (أ^) > ق (ب^)

أمثلة

(١)



فى الشكل المقابل ق(أ ب^ء) > ق (أ جـ^ ء)

ء ب = ء جـ إثبت أن ق(ب^) > ق (جـ^)

الحل

ق (أ ب^ء) > ق (أ جـ^ ء) (١)

ء ب = ء جـ

ق(ء ب^جـ) = ق (ء جـ^ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢

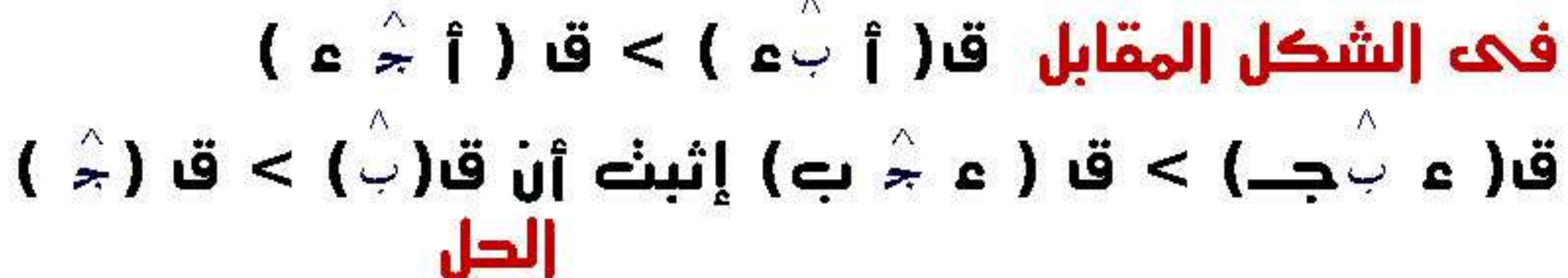


ق(أ ب^ء) + ق (ء ب^جـ) > ق (أ جـ^ ء) + (ء جـ^ ب)

ق (ب^) > ق (جـ^)

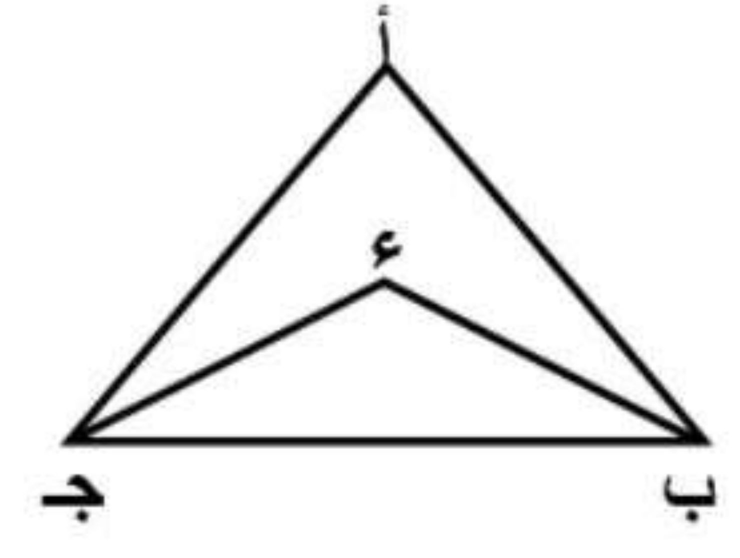
(٢)

فى الشكل المقابل ق(أ ب^ء) > ق (أ جـ^ ء)



ق(ء ب^جـ) > ق (ء جـ^ ب) إثبت أن ق(ب^) > ق (جـ^)

الحل



ق (أ ب^ء) > ق (أ جـ^ ء) (١)

ق(ء ب^جـ) > ق (ء جـ^ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(أ ب^ء) + ق (ء ب^جـ) > ق (أ جـ^ ء) + (ء جـ^ ب)

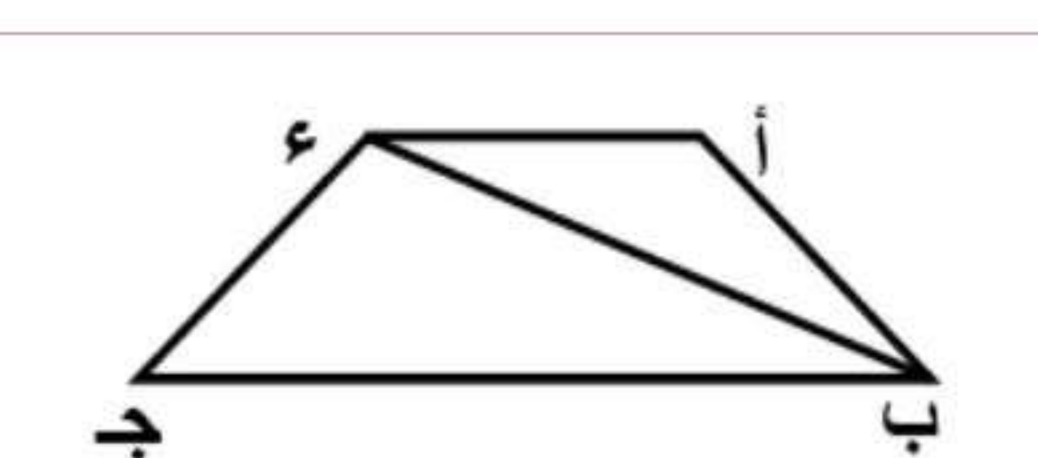
∴ ق (ب^) > ق (جـ)

(٣)

فى الشكل المقابل

أ ب > أ ء ، ب جـ > ء جـ

إثبت أن ق(أ ء جـ) > ق (أ $\hat{ب}$ جـ)



الحل

فى Δ أ ب ء

أ ب > أ ء

∴ ق (أ ء ب) > ق (أ $\hat{ب}$ ء) (١)

فى Δ ب جـ ء

ب جـ > جـ ء

∴ ق(ب ء جـ) > ق (ء $\hat{ب}$ جـ) (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(أ ء ب) + ق (ب ء جـ) > ق(أ $\hat{ب}$ ء) + ق (ء $\hat{ب}$ جـ)

∴ ق (أ ء جـ) > ق (أ $\hat{ب}$ جـ)

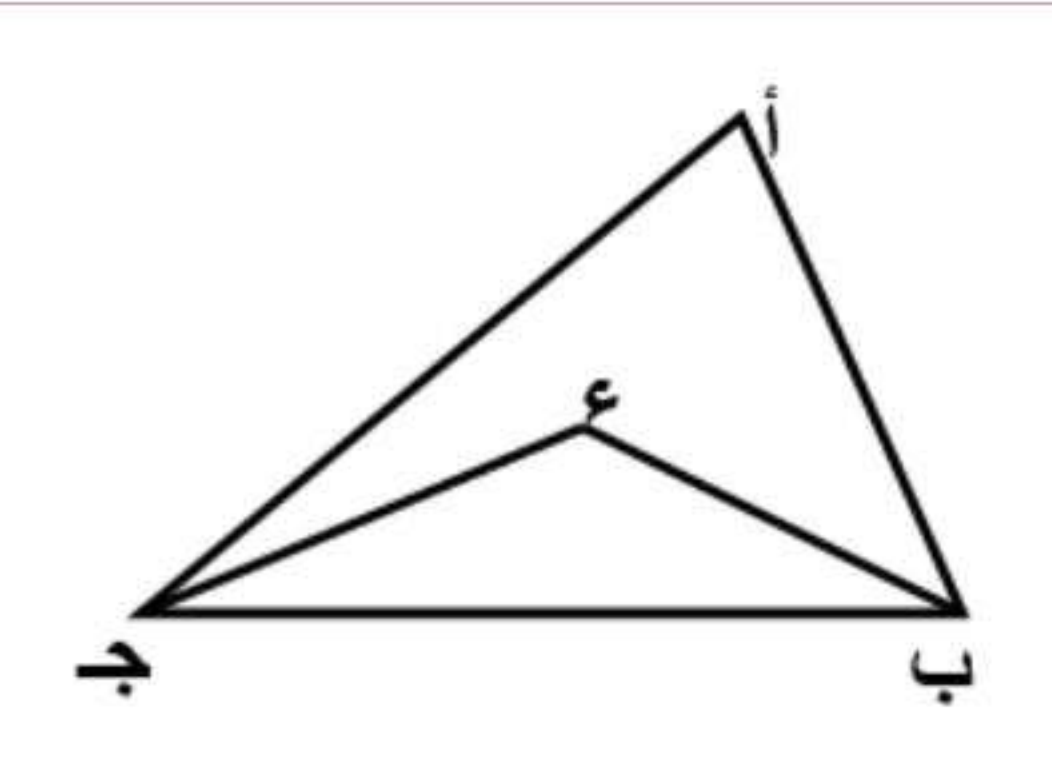
(٤)

فى الشكل المقابل

أ جـ > أ ب

ب ء = ء جـ

إثبت أن ق(أ $\hat{ب}$ ء) > ق (أ $\hat{جـ}$ ء)



الحل

فى Δ أ ب جـ

أ جـ > أ ب

∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) > ق (أ $\hat{جـ}$ ب) (١)

فى Δ ء ب جـ

ء ب = ء جـ

∴ ق(ء $\hat{ب}$ جـ) = ق (ء $\hat{جـ}$ ب) (٢)

بطرح ٢ من ١

ق(أ $\hat{ب}$ جـ) - ق (ء $\hat{ب}$ جـ) > ق(أ $\hat{جـ}$ ب) - ق (ء $\hat{جـ}$ ب)

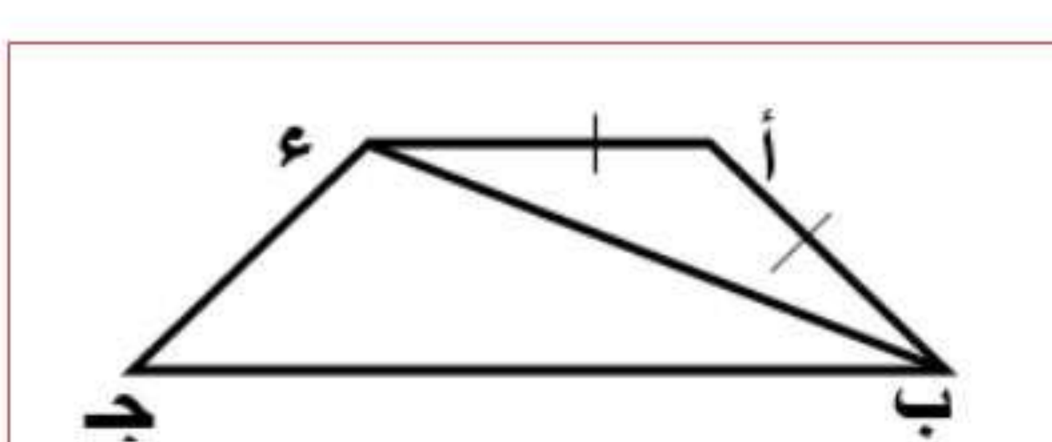
∴ ق(أ $\hat{ب}$ ء) > ق (أ $\hat{جـ}$ ء)

(٥)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ ء ، ب جـ > ء جـ

إثبت أن ق(أ ءˆ جـ) > ق (أ بˆ جـ)



الحل

فى Δ أ ب ء

أ ب = أ ء

∴ ق (أ ءˆ ب) = ق (أ بˆ ء) (١)

فى Δ ب جـ ء

ب جـ > جـ ء

∴ ق(ب ءˆ جـ) > ق (ء بˆ جـ) (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(أ ءˆ ب) + ق (ب ءˆ جـ) > ق(ب ءˆ جـ) + ق (ء بˆ جـ)

∴ ق (أ ءˆ جـ) > ق (أ بˆ جـ)

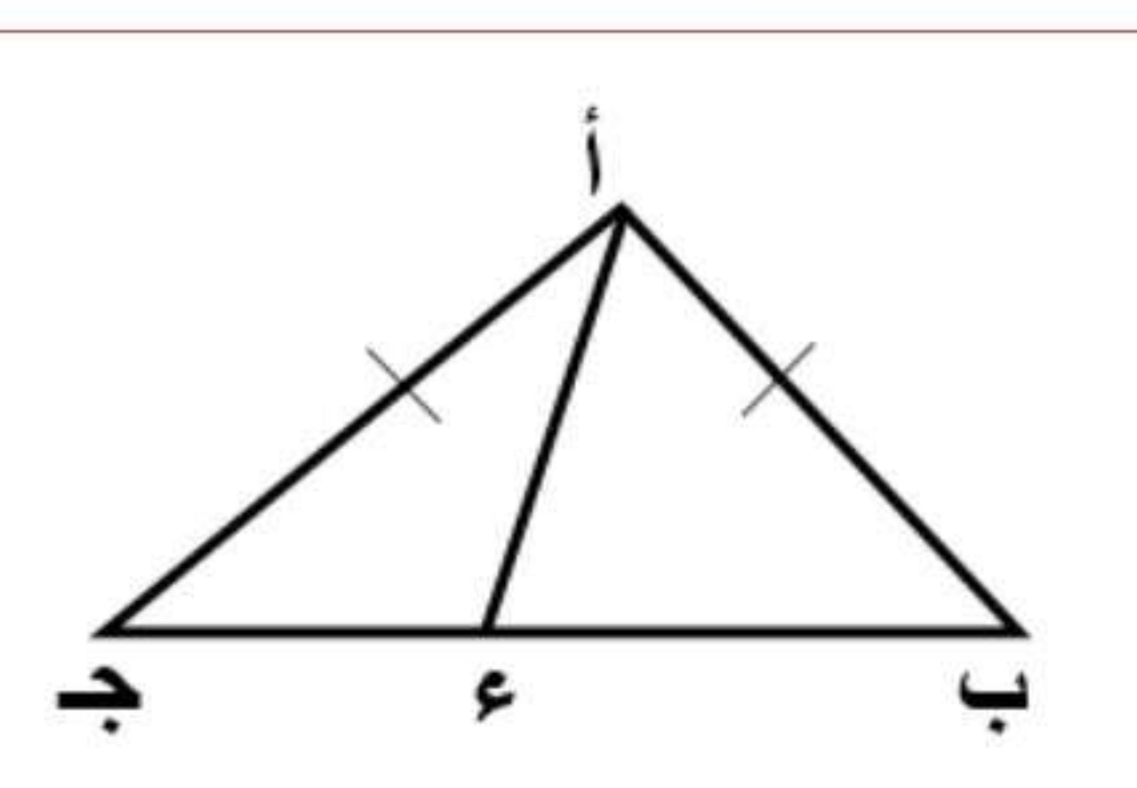
(٦)

فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء ∈ ب جـ

برهن أن

ق(أ ءˆ ب) > ق(بˆ)



الحل

فى Δ أ ب جـ

أ ب = أ جـ

∴ ق (بˆ) = ق (جـˆ) (١)

ق (أ ءˆ ب) > ق (جـˆ) (٢) [خارجة عن Δ أ ء جـ]

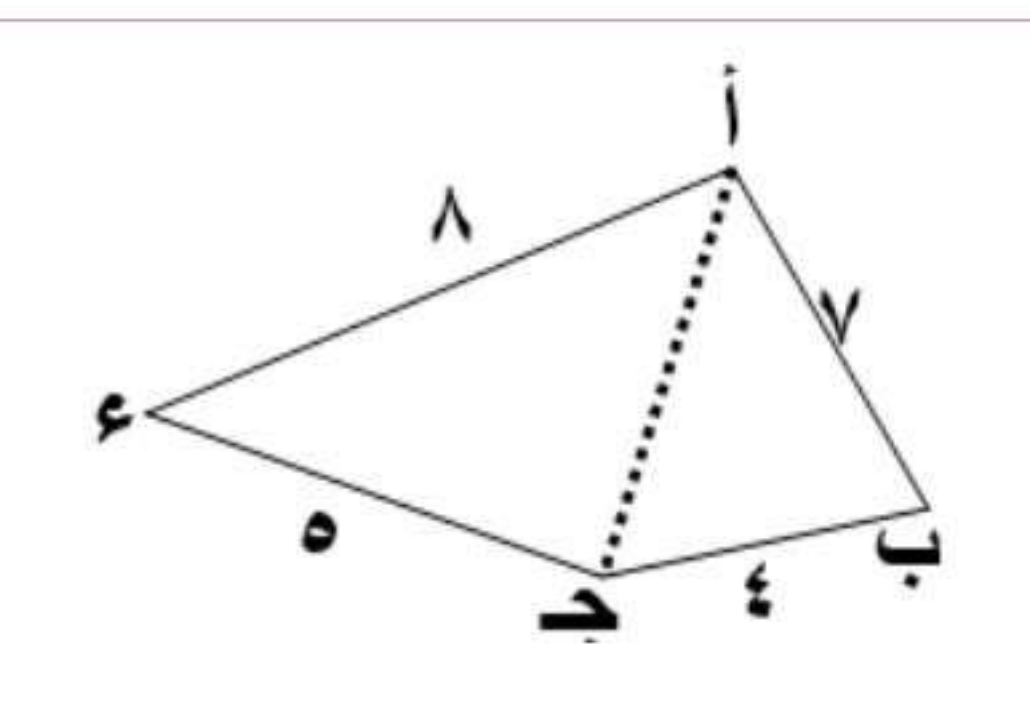
من ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق (أ ءˆ ب) > ق (بˆ) [وهو المطلوب إثباته]

(٧)

فى الشكل المقابل

برهن أن ق (ب $\hat{جـ}$ ء) > ق (ب $\hat{أ}$ ء)



الحل

فى Δ أ ب جـ
أ ب > ب جـ
∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ب) > ق (ب $\hat{أ}$ جـ) (١)
فى Δ أ جـ ء
أ ء > جـ ء
∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ء) > ق (جـ $\hat{أ}$ ء) (٢)

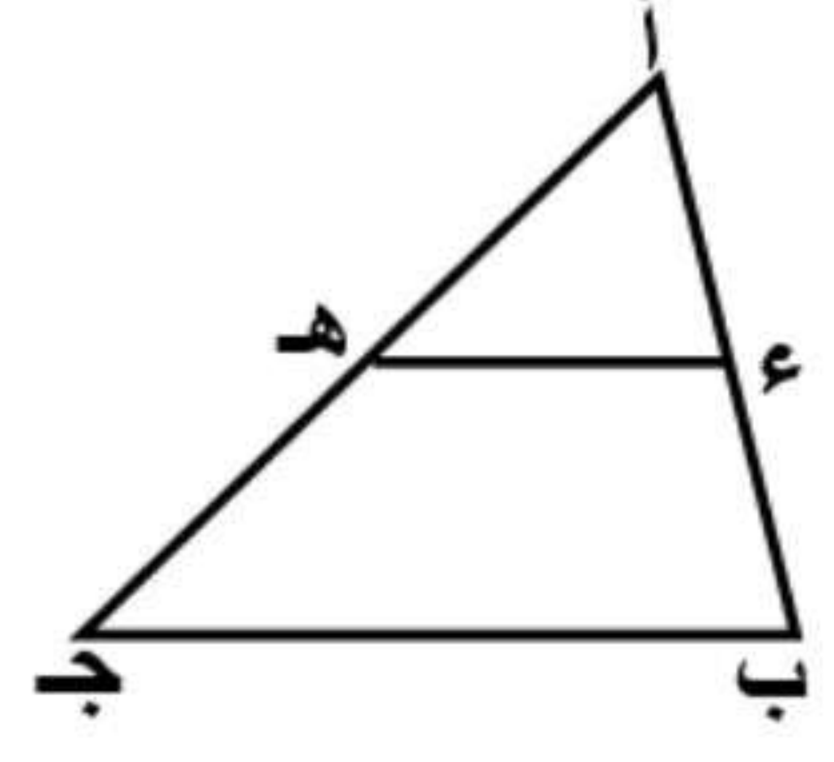
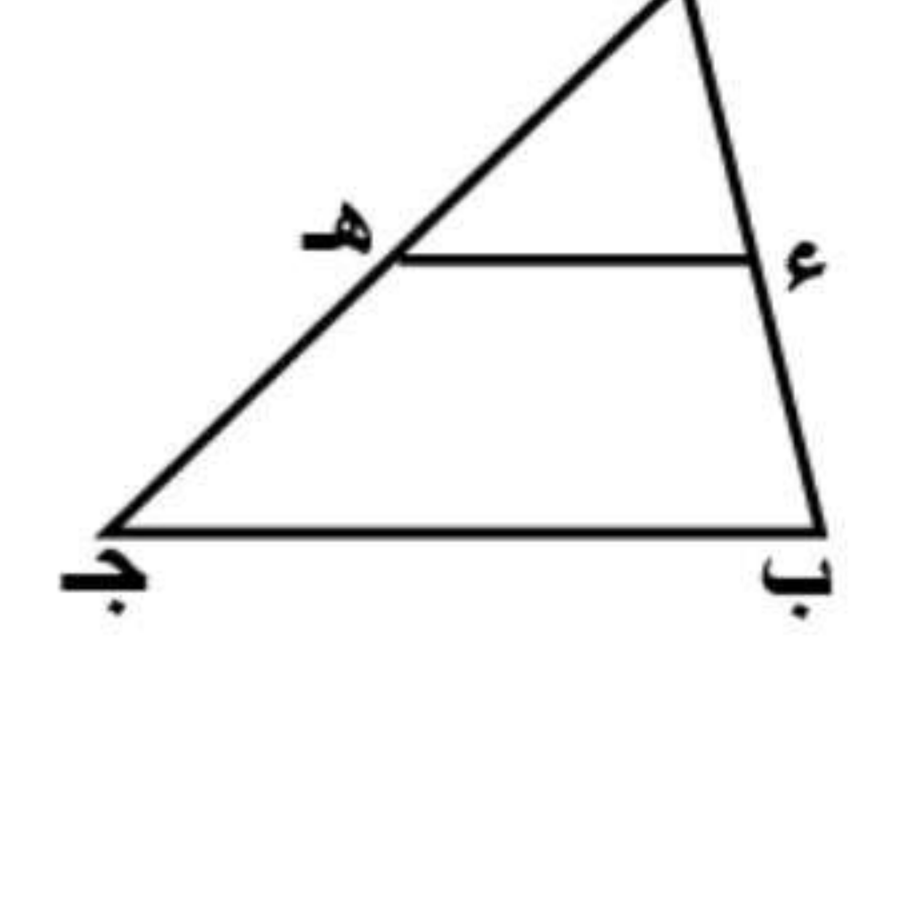
بجمع ١ ، ٢ ينتج أن
ق (أ $\hat{جـ}$ ب) + ق (أ $\hat{جـ}$ ء) > ق (ب $\hat{أ}$ جـ) + ق (جـ $\hat{أ}$ ء)

∴ق (ب $\hat{جـ}$ ء) > ق (ب $\hat{أ}$ ء)

(٨)

فى الشكل المقابل

$\overline{أ جـ}$ > $\overline{أ ب}$
ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$
برهن أن
ق(أ $\hat{ء}$ هـ) > ق (أ $\hat{هـ}$ء)

الحل

فى Δ أ ب جـ
أ جـ > أ ب
∴ ق ($\hat{ب}$) > ق ($\hat{جـ}$) (١)
ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ
∴ ء هـ // ب جـ
∴ ق (أ $\hat{ء}$هـ) = ق ($\hat{ب}$) (٢)
∴ ق (أ $\hat{هـ}$ ء) = ق ($\hat{جـ}$) (٣)
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن
∴ ق (أ $\hat{ء}$هـ) > ق (أ $\hat{هـ}$ ء)

(٩)

فى الشكل المقابل

أ ب > أ ء

ب جـ = جـ ء

إثبت أن ق(أ ء̂ جـ) > ق (أ ب̂ جـ)

الحل

فى ∆ أ ب ء

أ ب > أ ء

∴ ق (أ ء̂ ب) > ق (أ ب̂ ء) (١)

فى ∆ ب جـ ء

ب جـ = جـ ء

∴ ق (جـ ب̂ ء) = ق (جـ ء̂ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢

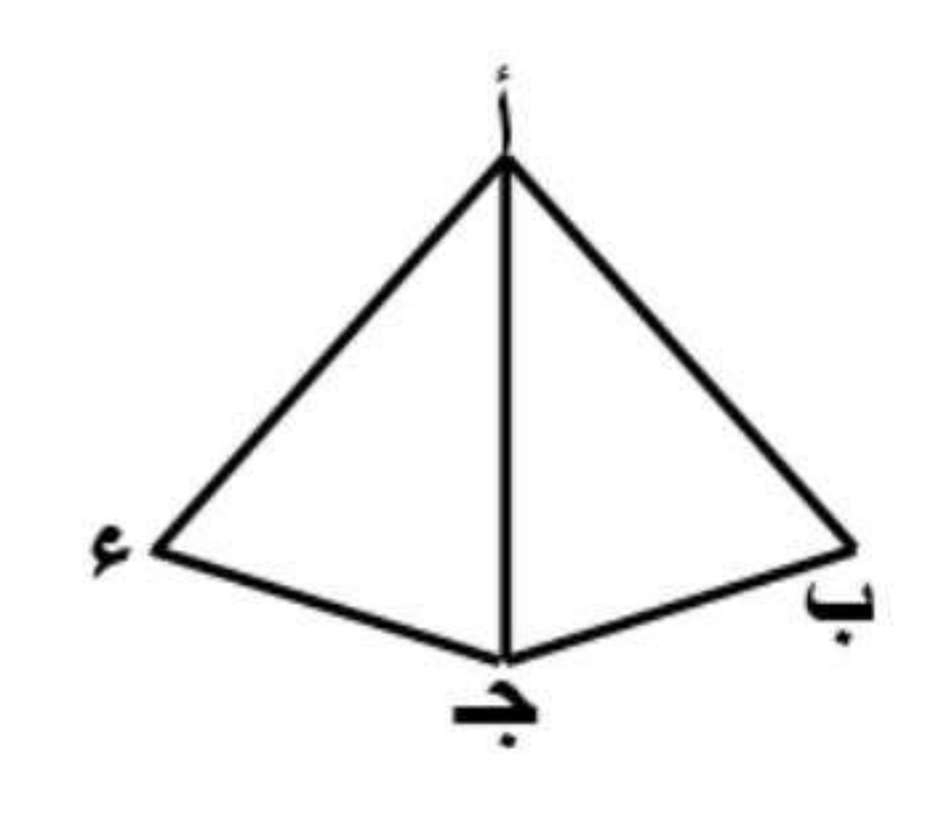
ق (أ ء̂ ب) + ق (ب ء̂ جـ) > ق (أ ب̂ ء) + ق (ء ب̂ جـ)

∴ ق (أ ء̂ جـ) > ق (أ ب̂ جـ)

(١٠)

فى الشكل المقابل أ ب > ب جـ ، أ ء > ء جـ

برهن أن ق (ب جـ̂ ء) > ق (ب أ̂ ء)





الحل

فى ∆ أ ب جـ

أ ب > ب جـ

∴ ق (أ جـ̂ ب) > ق (ب أ̂ جـ) (١)

فى ∆ أ جـ ء

أ ء > جـ ء

∴ ق (أ جـ̂ ء) > ق (جـ أ̂ ء) (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ جـ̂ ب) + ق (أ جـ̂ ء) > ق (ب أ̂ جـ) + ق (جـ أ̂ ء)

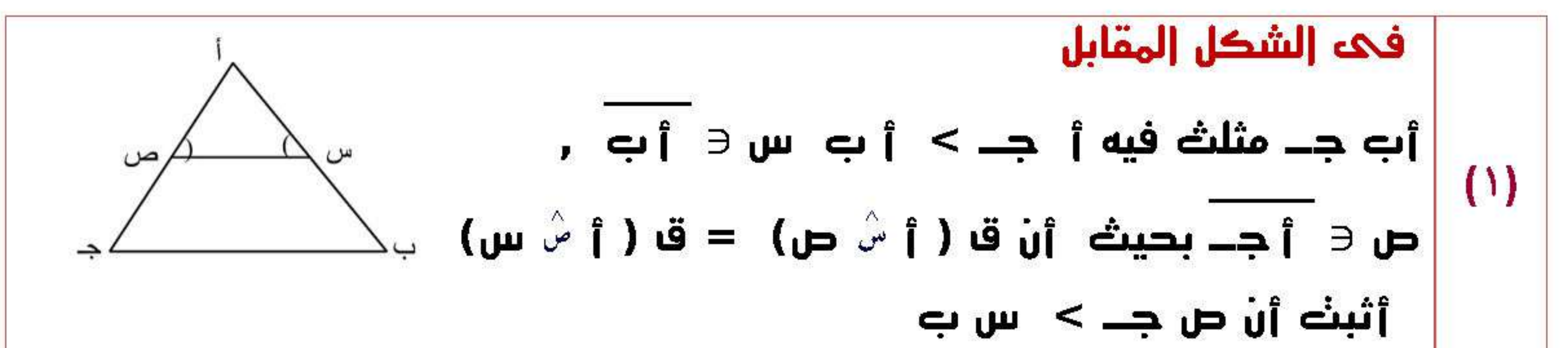
∴ ق (ب جـ̂ ء) > ق (ب أ̂ ء)



تمارين (التباين) المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث (٥)

(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	إذا كان أ ب > ب جـ > أ جـ فإن ق (^) > ق(^) > ق (^)	(١)	إذا كان أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، أجـ = ٦ سم فإن ق (^) > ق (^) > ق (^)
(٢)	Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٦ سم فإن أ) أكبر الزاويا هى زاوية ..... ب) أصغر الزاويا هى زاوية....	(٢)	فى أى مثلث أ ب جـ إذا كان أ ب > أ جـ > ب جـ فإن ق (^)> ق (^) > ق (^)
(٣)	فى Δ ء هـ و إذا كان ء هـ > هـ و فإن (وَ^) > ق (^)	(٣)	فى Δ س ص ع ، س ص > ص ع فإن ق (سَ^) .... ق (عَ^)
(٤)	أصغر زوايا المثلث قياساً يقابلها	(٤)	أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولا هو ....
(٥)	إذا إختلف قياس زاويتين فى مثلث فاكبرهما فى القياس يقابلها ضلع	(٥)	إذا إختلف طولا ضلعين فى مثلث فاكبرهما فى الطول تقابله زاوية ....

أسئلة مقالية



(١) فى الشكل المقابل

أب جـ مثلث فيه أ جـ > أ ب س ∈ $\overline{أ ب}$ ،

ص ∈ $\overline{أ جـ}$ بحيث أن ق (أ سَ^ ص) = ق (أ صَ^ س)

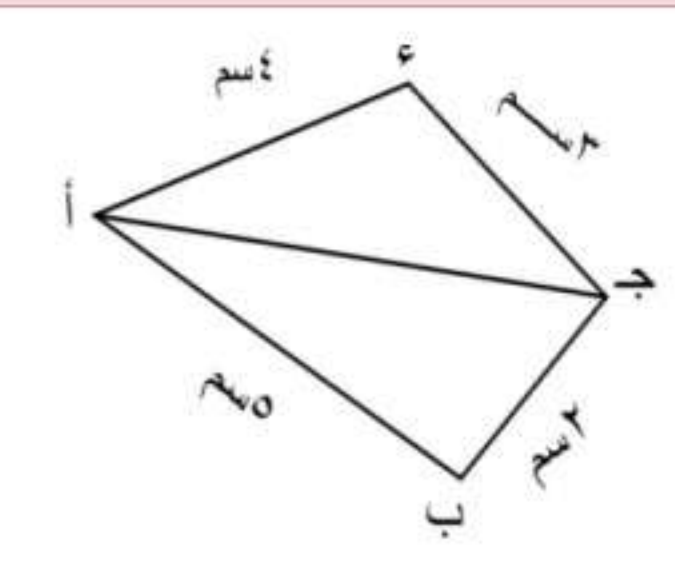
أثبت أن ص جـ > س ب

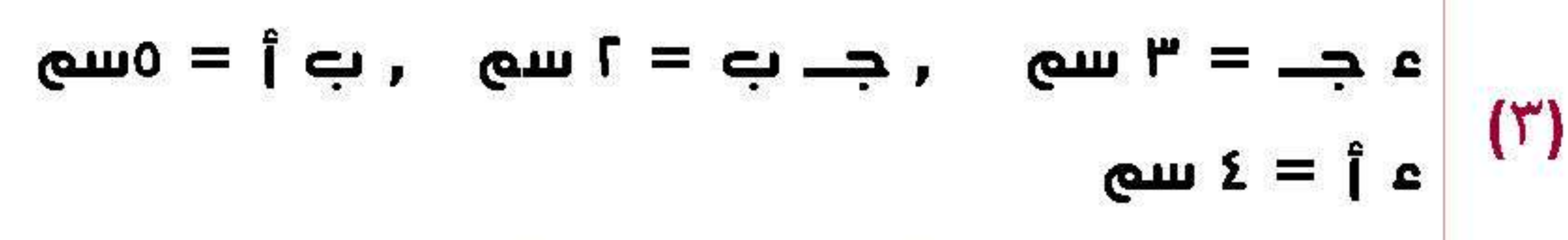
(٢) **رتب قياسات زوايا △ ترتيباً تصاعدياً**

١) أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، أ جـ = ١٠ سم

٢) أ ب = ٥,٧ سم ، ب جـ = ٨,٥ سم ، أ جـ = ٦ سم

(٣) **فى الشكل المقابل**

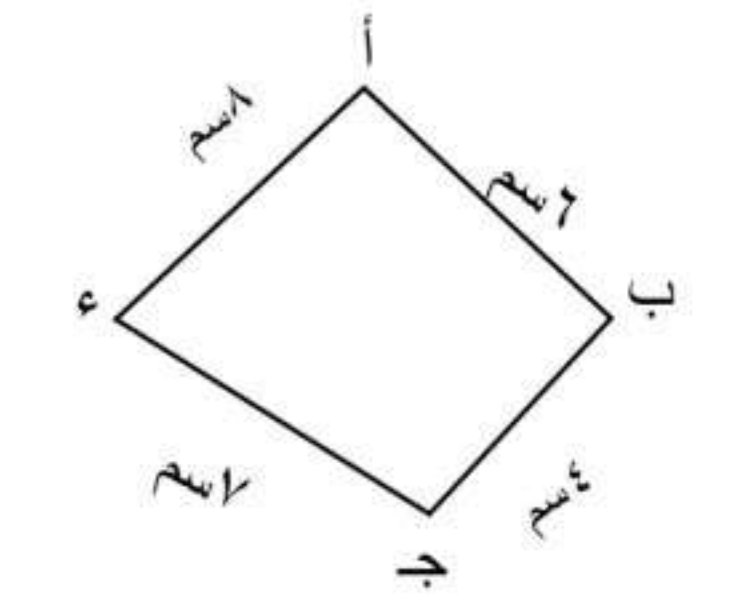



ء جـ = ٣ سم ، جـ ب = ٢ سم ، ب أ = ٥سم

ء أ = ٤ سم

إثبت أن ق (ء جـ̂ ب) > ق (ء أ̂ ب)

(٤) **فى الشكل المقابل**

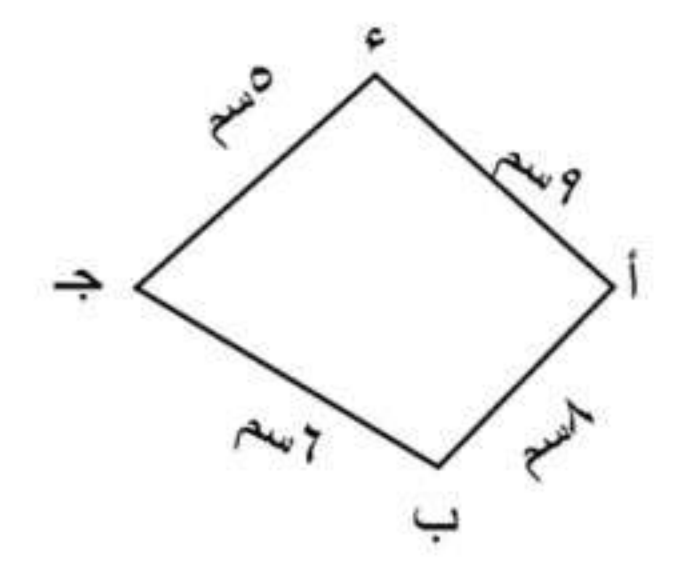


أب = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ ء = ٧ سم

أء = ٨ سم أثبت أن

ق (ب جـ̂ ء) > ق (ب أ̂ ء)

(٥) **فى الشكل المقابل**

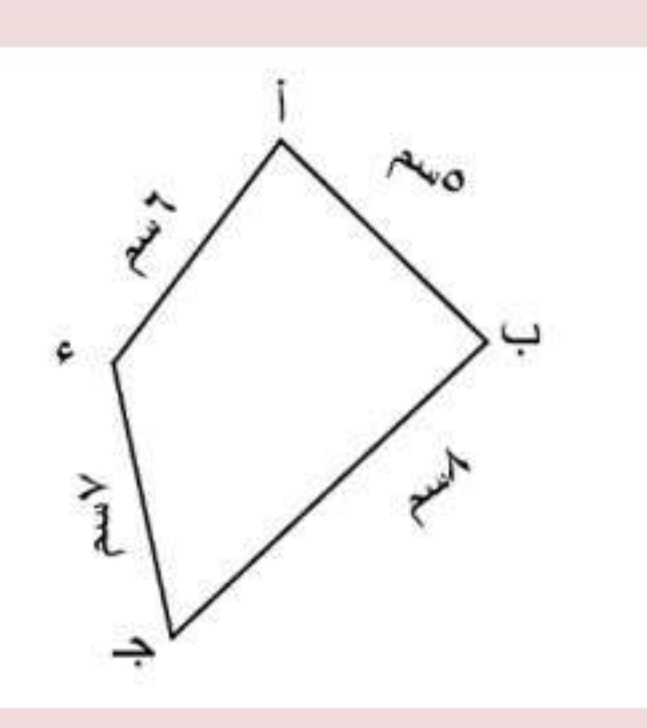


أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم جـ ء = ٥ سم

، أء = ٩ سم

أثبت أن ق (جـ̂) > ق (أ̂)

(٦) **فى الشكل المقابل**

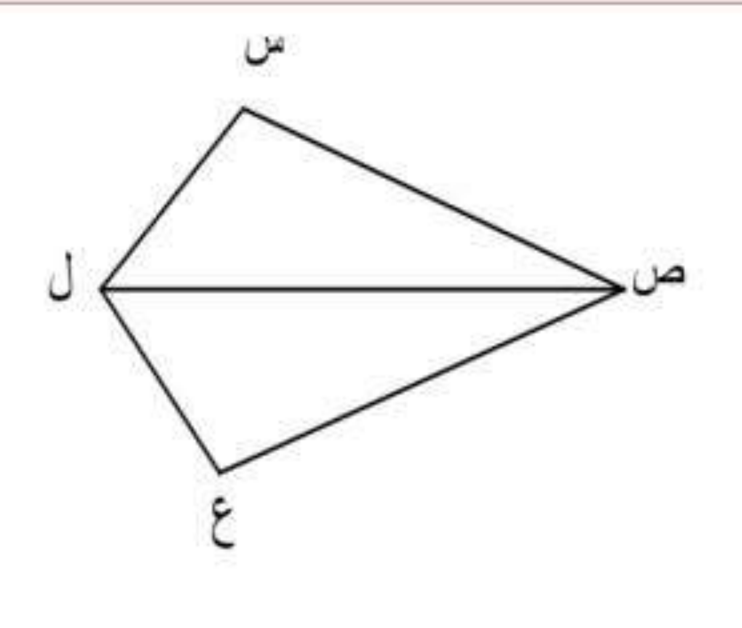


أ ب جـ ء شكل رباعى أ ب = ٥ سم

ب جـ = ٨ سم ، جـ ء = ٧ سم ، أ ء = ٦ سم

برهن أن ق (ب أ̂ ء) > ق (ب جـ̂ ء)

(٧) **فى الشكل المقابل**



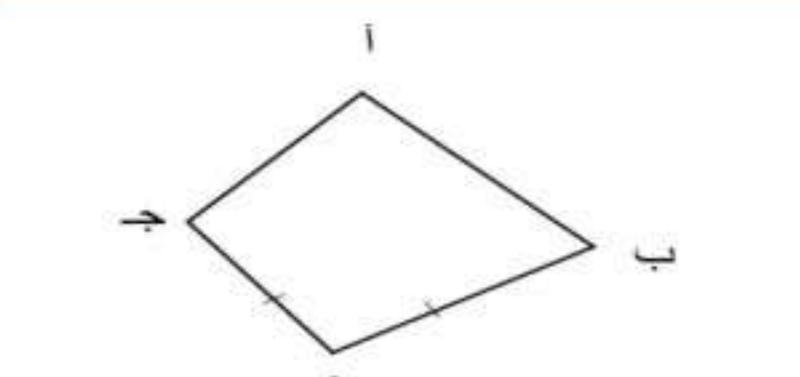
س ص > س ل ، ص ع > ع ل برهن أن

ق (س ل̂ ع) > ق (س ص̂ ع)

(٨) فى الشكل المقابل

أ ب > أ جـ ، ء ب = ء جـ

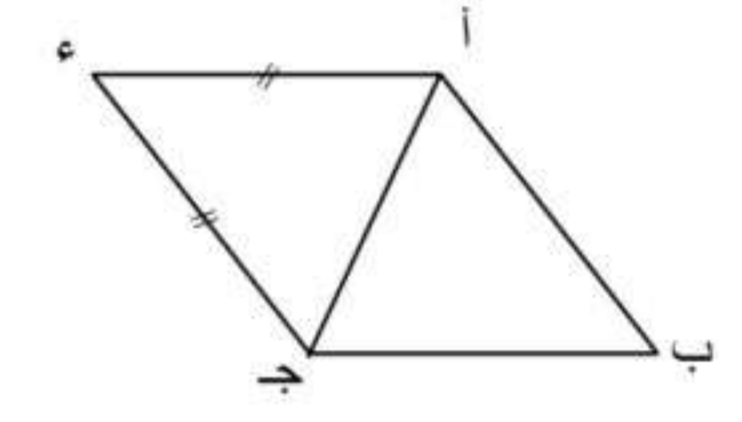
أثبت أن ق (أ جـ^ ء) > ق (أ ب^ ء)



(٩) فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ء = ء جـ ،

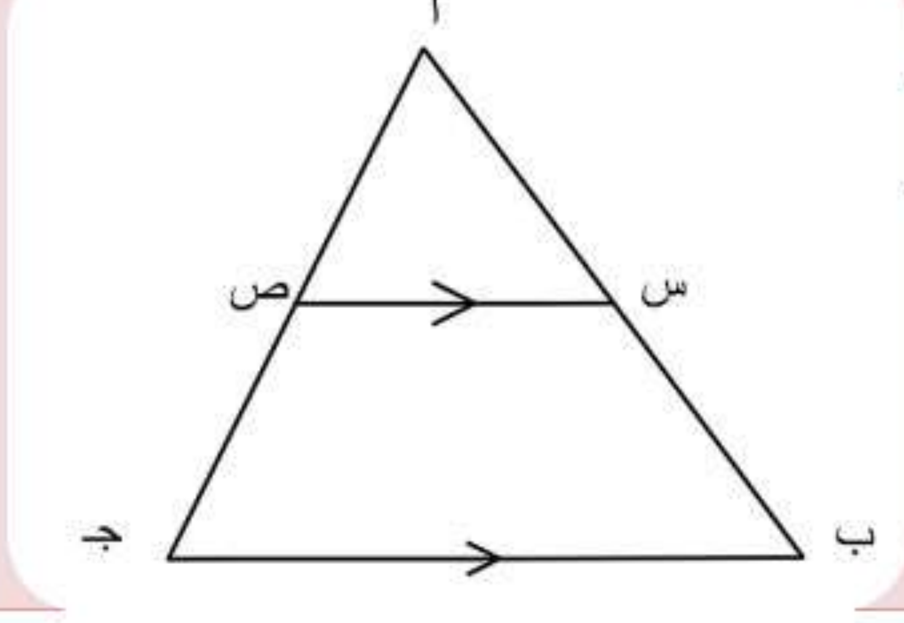
ب جـ > أ ب برهن أن ق (أ^) > ق (جـ^)

(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه أ ب > أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

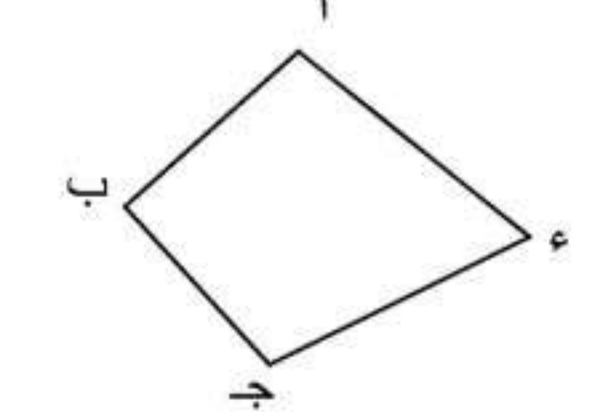
برهن أن ق (أ ص^ س) > ق (أ س^ ص)



(١١) فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب < أ ء ، ب جـ < ء جـ

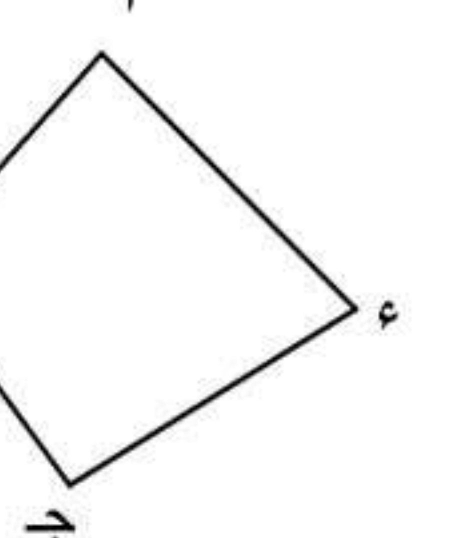
أثبت أن ق (أ ب^ جـ) > ق (أ ء^ جـ)



(١٢) فى الشكل المقابل

أ ء = أ ب ، ء جـ > ب جـ

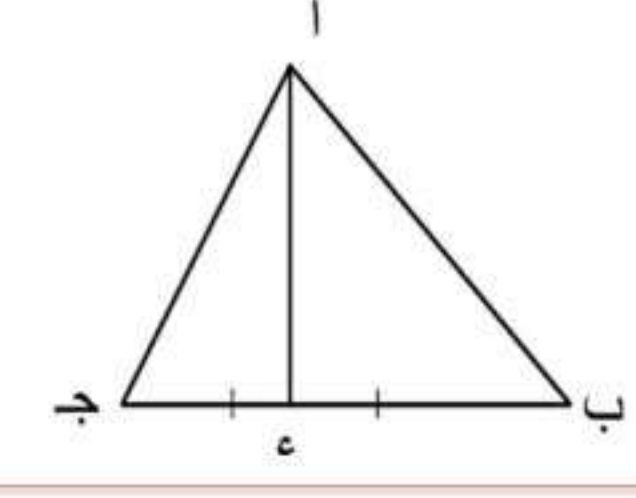
أثبت أن ق (أ ب^ جـ) > ق (أ ء^ جـ)



(١٣) فى الشكل المقابل

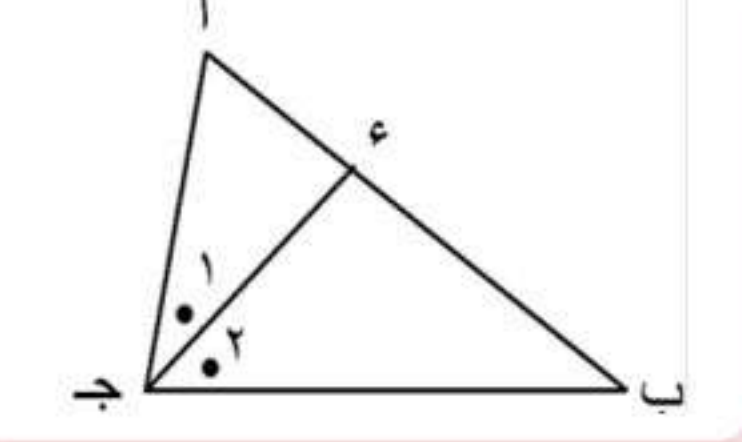
محيط Δ أ جـ ء > محيط Δ أ ب ء

برهن أن ق (ب^) > ق (ء^)



(١٤) فى الشكل المقابل

جـ ب > أ ب برهن أن (ب ء^ جـ) منفرجة



الدرس الثانى المقارنة بين أطوال أضلاع المثلث

نظرية

- إ ذا إختلف قياس زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى
- إذا كان لدينا Δ أ ب جـ فيه ق ($\hat{ب}$) > ق ($\hat{أ}$) فإن أ جـ > جـ ب

ملاحظات

١) أكبر الزوايا قياسها يقابلها أ كبر الأضلاع طولاً

٢) فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

٣)فى المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً

نتيجة

- طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم

تعريف

- بعد أى نقطة من مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم

أمثلة

(١)

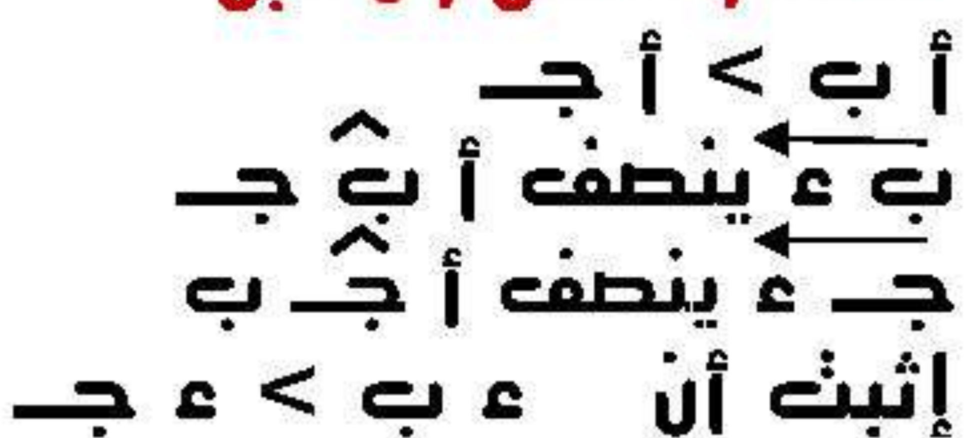
فى الشكل المقابل

أ ب > أ جـ

ب ء ينصف أ ب̂ جـ

جـ ء ينصف أ جـ̂ ب

إثبت أن ء ب > ء جـ



الحل

أ ب > أ جـ

∴ ق (جـ̂) > ق (ب̂)

ب ء ينصف أ ب̂ جـ

∴ ق(ء ب̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب̂)

جـ ء ينصف أ جـ ء

∴ق (ء جـ̂ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (جـ̂)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق (ء جـ̂ ب) > ق (ء ب̂ جـ)

∴ ء ب > ء جـ

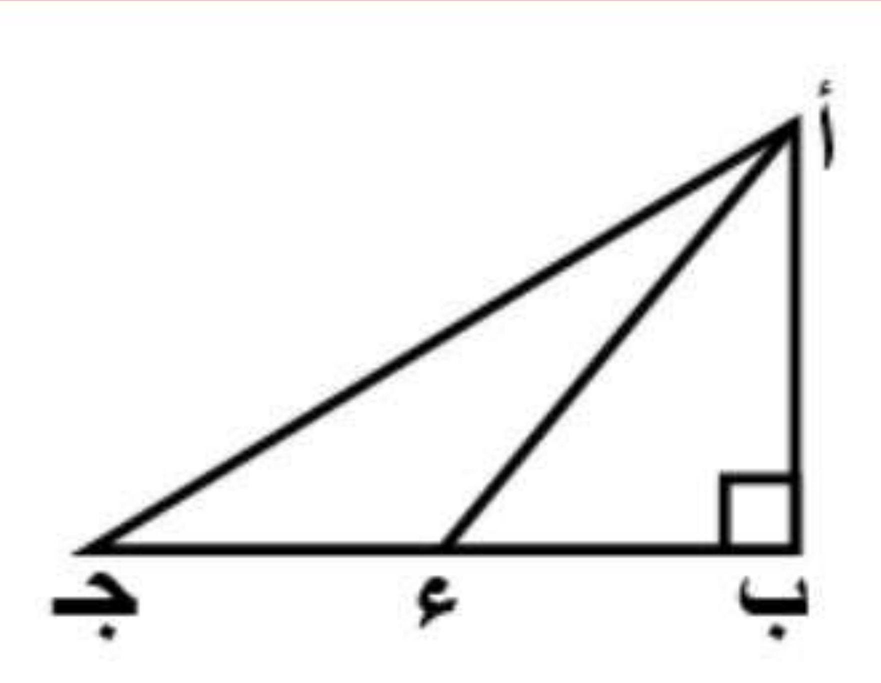
(٢)

فى الشكل المقابل

أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

ء ∋ ب جـ

إثبت أن أ جـ > أ ء



الحل

فى Δ أ ب جـ

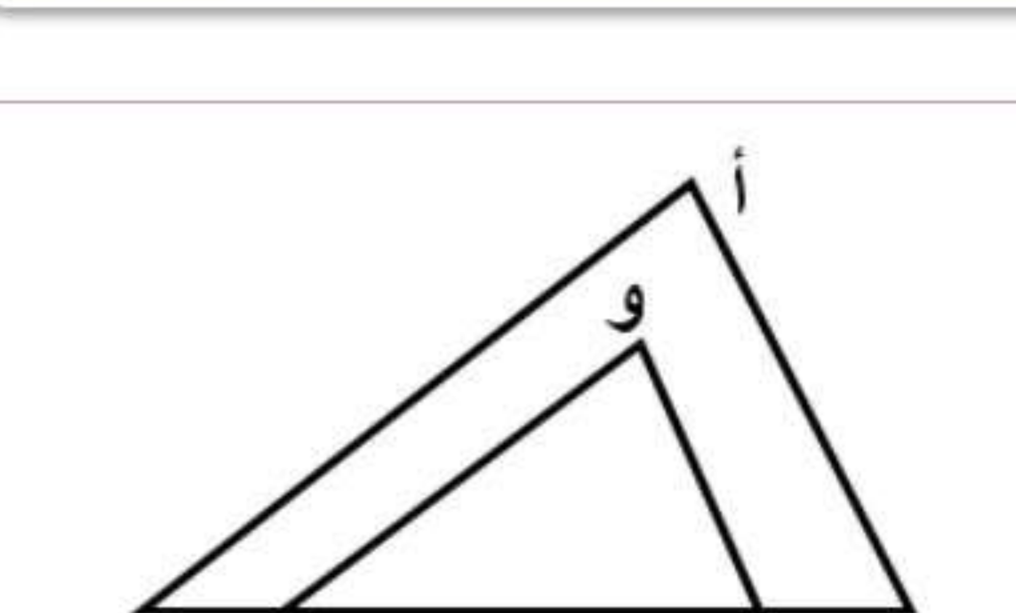
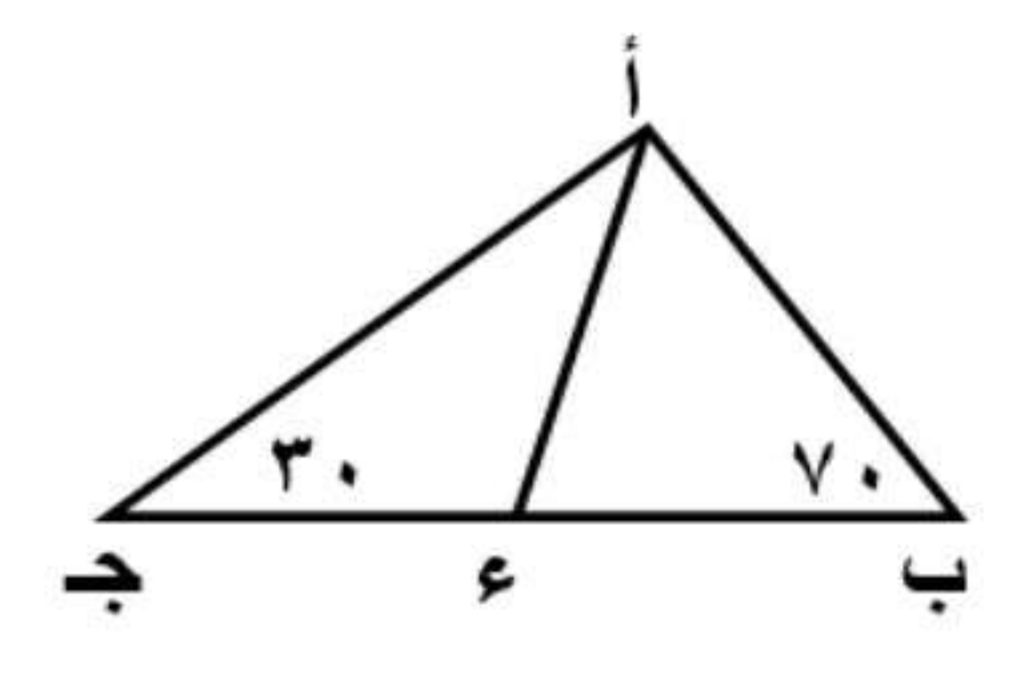
∴ ق(ب̂) > ق (جـ̂)

ق (أ ء̂ جـ) > ق (ب̂) [لأنها خارجة عن Δ أ ب ء]

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ ء̂ جـ) > ق (جـ̂)

∴ أ جـ > أ ء

(٣)	**فى الشكل المقابل** أ ب // ء و ، أ جـ // هـ و إذا كان أ جـ > أ ب برهن أن و هـ > ء و  **الحل** فى Δ أ ب جـ أ جـ > أ ب ∴ ق (ب̂) > ق (جـ̂) (١) أ ب // ء و ∴ ق (و ءَ̂ هـ) = ق (ب̂) (٢) أ جـ // و هـ ق (و هـ̂ ء) = ق (جـ̂) (٣) من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (و ءَ̂ هـ) > ق (و هـ̂ ء) ∴ و هـ > و ء
(٤)	**فى الشكل المقابل** أ ء ينصف (ب أ̂ جـ) ق (ب̂) = ٧٠ ، ق(جـ̂) = ٣٠ إثبت أن أ ء > ب ء  **الحل** مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠ ∴ ق (ب أ̂ جـ) = ١٨٠° − [٧٠° + ٣٠°] = ٨٠° أ ء ينصف ب أ̂ جـ ∴ ق(ب أ̂ ء) = ق (ء أ̂ جـ) = ٤٠ فى Δ أ ب ء ق (ب̂) > ق (ب أ̂ ء) ∴ أ ء > ب ء

(٥)

في الشكل المقابل

إذا كان أ هـ // ب جـ

إثبت أن أ جـ > أ ب

الحل

أ هـ // ب جـ

∴ ق (بَ̂) = ق (ء أ̂ هـ) = ٧٠° [بالتناظر]

، ق (جـ) = ق (هـ أ̂ جـ) = ٣٠ [بالتبادل]

فى Δ أ ب جـ

ق (ب̂) > ق (جـ̂)

∴ أ جـ > أ ب

(٦)

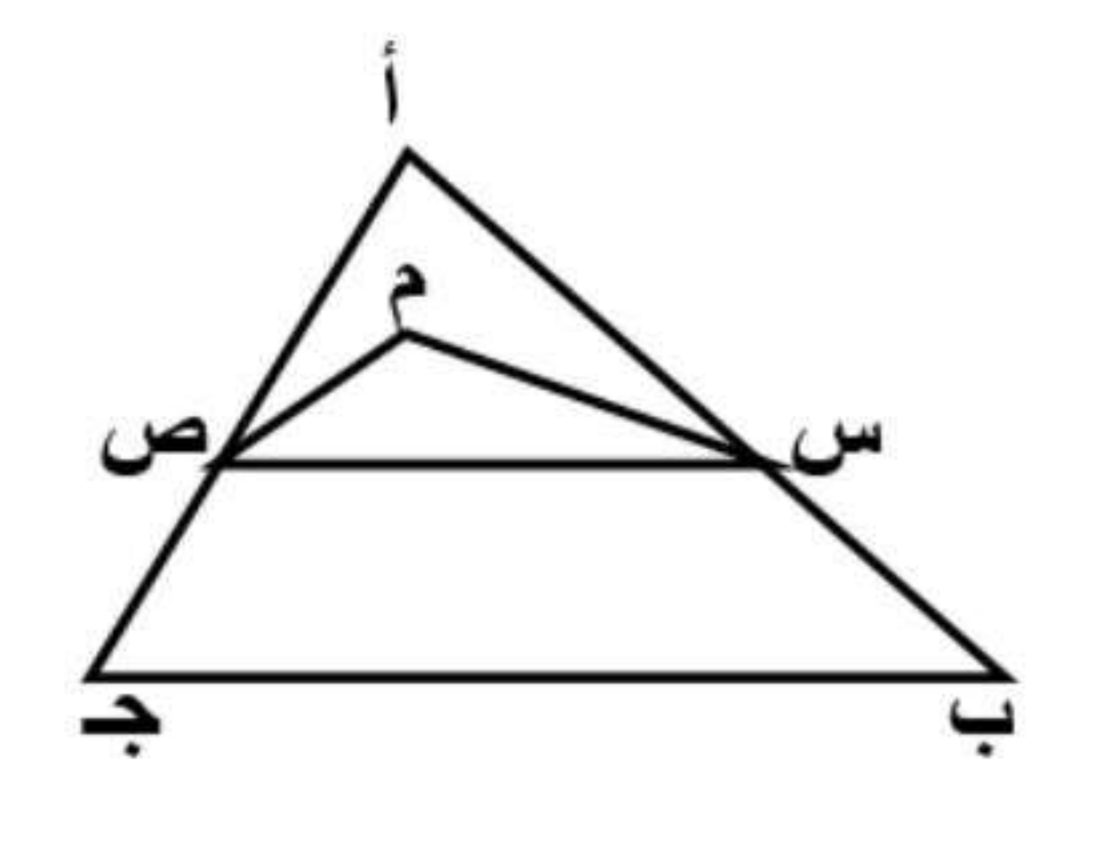
فى الشكل المقابل

أ ب > أ جـ ، س ص // ب جـ

س م ← ينصف (أ س̂ ص)

ص م ← ينصف (أ ص̂ س)

برهن أن م س > م ص



الحل

فى Δ أ ب جـ

أ ب > أ جـ ∴ ق (جـ̂) > ق (ب̂) (١)

س ص // ب جـ ∴ ق(أ س̂ ص) = ق (ب̂) (٢)

، ق(أ ص̂ س) = ق(جـ̂) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق(أ ص̂ س) > ق (أ س̂ ص) (٤)

س م ← ينصف أ س̂ ص ∴ق (م س̂ ص) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ س̂ ص) (٥)

ص م ← ينصف أ ص̂ س ∴ ق (م ص̂ س) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ ص̂ س) (٦)

من ٤ ، ٥ ، ٦ ينتج ان

ق (أ ص̂ س) > ق (أ س̂ ص)

∴ س م > ص م

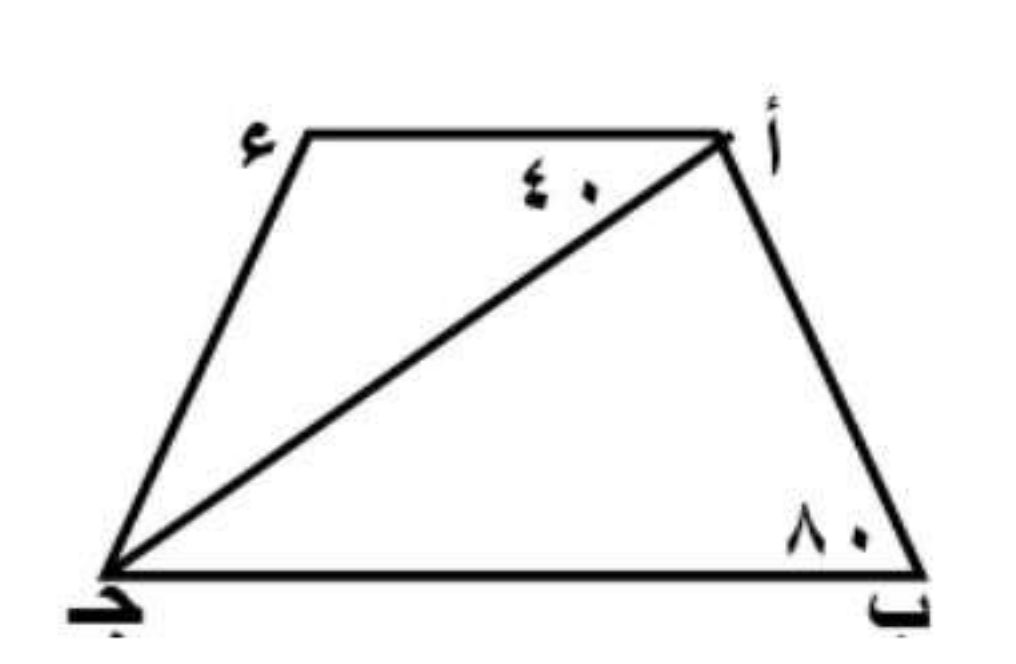
(٧)

فى الشكل المقابل

أ ء // ب جـ ، ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٨٠

ق (ء $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠

إثبت أن ب جـ > أ جـ



الحل

أ ء // ب جـ

∴ ق(أ $\hat{جـ}$ب) = ق (ء $\hat{أ}$جـ) = ٤٠

فى Δ أ ب جـ

مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق (ب $\hat{أ}$جـ) = ١٨٠° − [٨٠ + ٤٠] = ٦٠

∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) > ق (ب $\hat{أ}$جـ)

∴ أ جـ > ب جـ

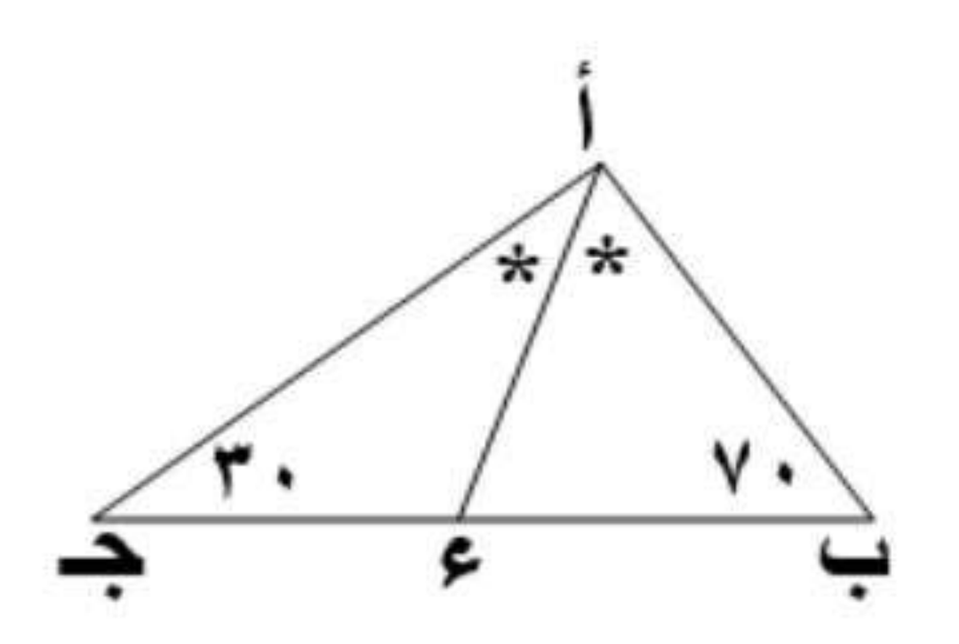
(٨)

فى الشكل المقابل



أء ينصف ب $\hat{أ}$ جـ

إثبت أن أ ء > ب ء



الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = ١٨٠ − [٧٠ + ٣٠] = ٨٠°

أ ء ينصف ب $\hat{أ}$ جـ

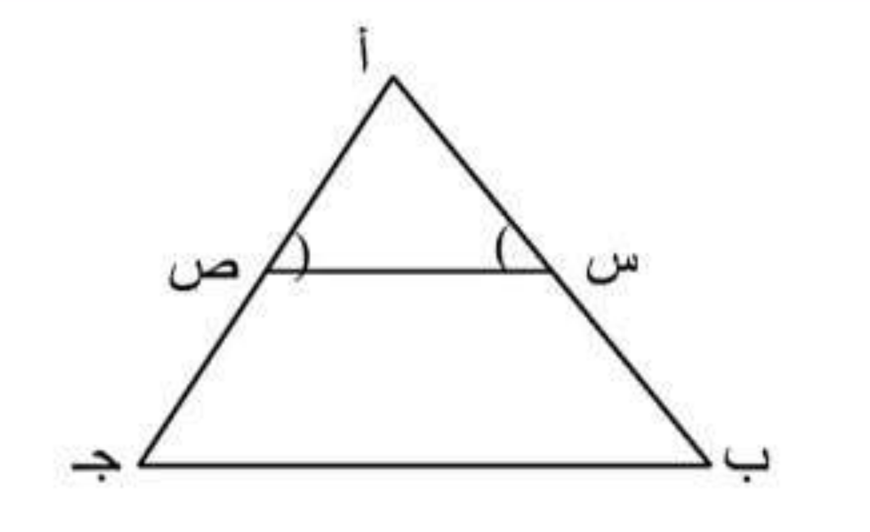
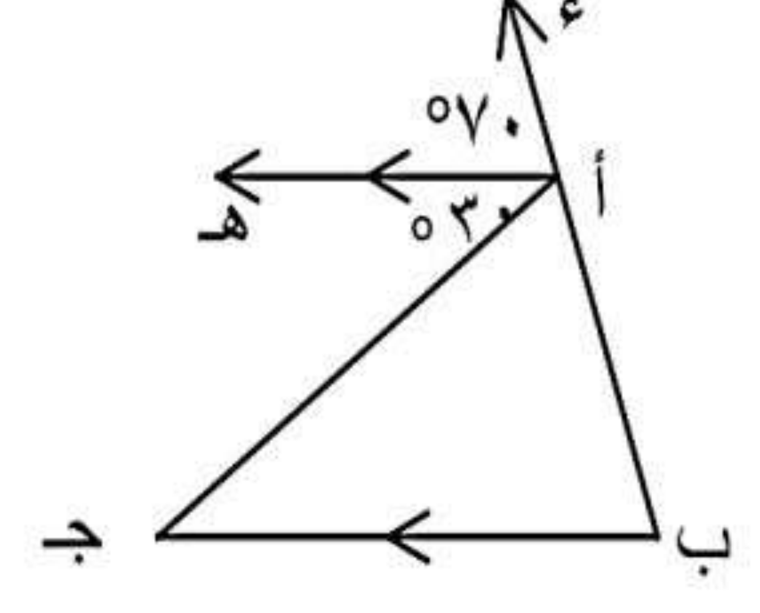
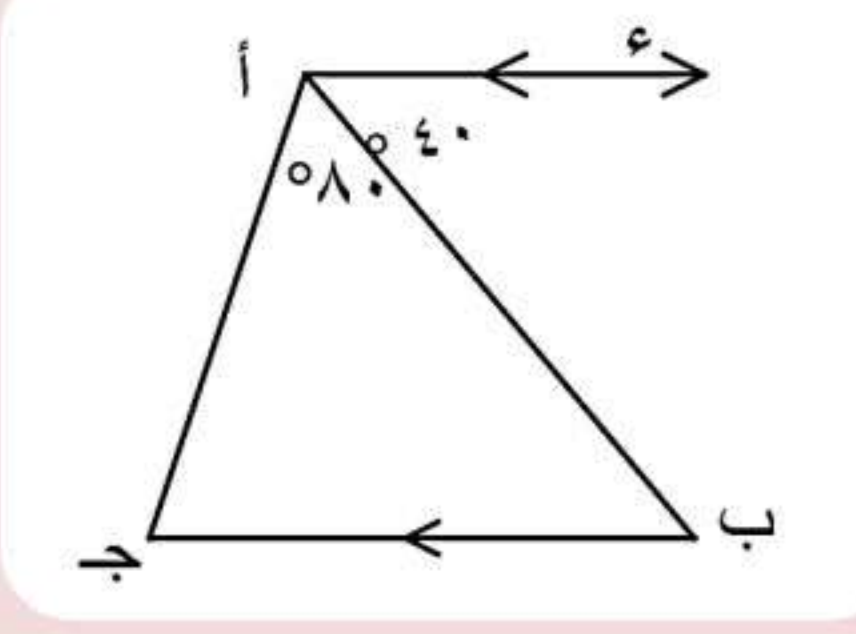
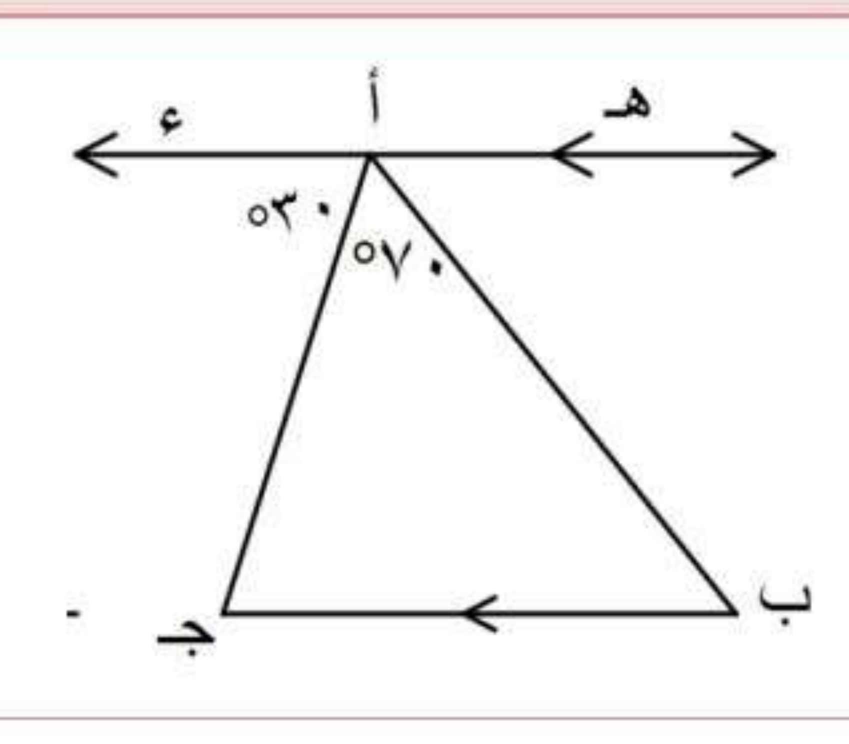
∴ ق (ب $\hat{أ}$ ء) = ق (ء $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠



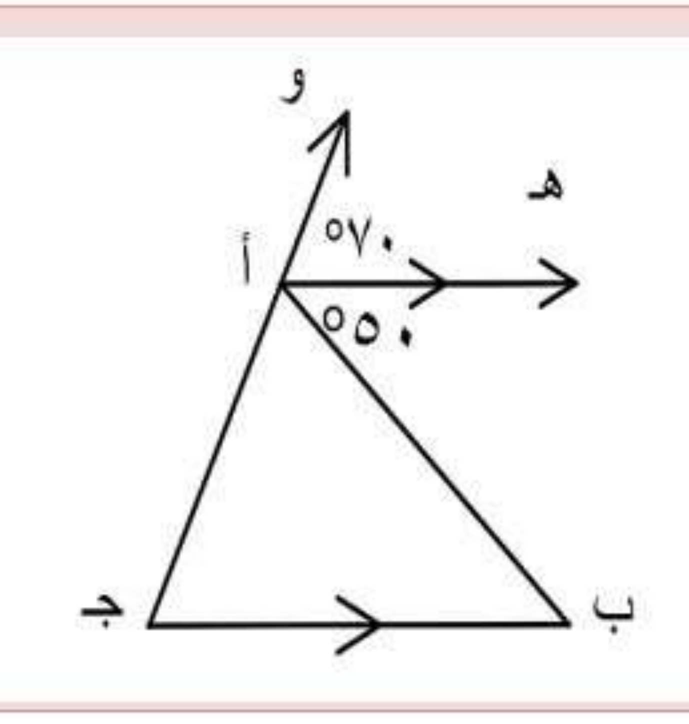
تمارين المقارنة بين أطوال أضلاع المثلث (٥)

(١)	أكمل ما يأتى		
(١)	إذا إختلف قياس زاويتين فى مثلث فاكبرهما فى القياس يقابلها ضلع	(١)	أ ب جـ مثلث فيه ق (بَ^)= ١٠٠° فإن أكبر الاضلاع طولا هو ....
(٢)	إذا إختلف طولا ضلعين فى مثلث فاكبرهما فى الطول تقابله زاوية	(٢)	Δ أ ب جـ إ ذا كان ق (أَ^) = ٧٠° , ق (بَ^) = ٥٠° فإن أكبر الاضلاع طولا هو ....
(٣)	أصغر زوايا المثلث قياساً يقابلها	(٣)	Δ أ ب جـ إ ذا كان ق (بَ^)= ٤٥° , ق (أَ^) = ٥٠° , فإن أكبر الاضلاع طولا هو ....
(٤)	أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولا هو	(٤)	Δ أ ب جـ فيه ق (أَ^) = ٤٠° , ق (بَ^) = ١٢٠° فإن أصغر الاضلاع طولا هو.........
(٥)	أقصر بعد بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم	(٥)	Δ أ ب جـ فيه ق (أَ^) =ق (بَ^) + ق (جـَ^) فإن أكبر الاضلاع طولا هو ....
(٦)	إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق (بَ^) = ٩٠° فإن	(٦)	فى Δ س ص ع س ص > ص ع فإن ق (سَ^) ..... ق (عَ^)
(٧)	إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق (أَ^) = ٤٠° , ق (بَ^)= ٧٠° فإن	(٧)	فى Δ أ ب جـ إذا كان فيه ق (أَ^) = ٤٠° , ق (جـَ^) = ٧٠° فإن أ ب ...... ب جـ

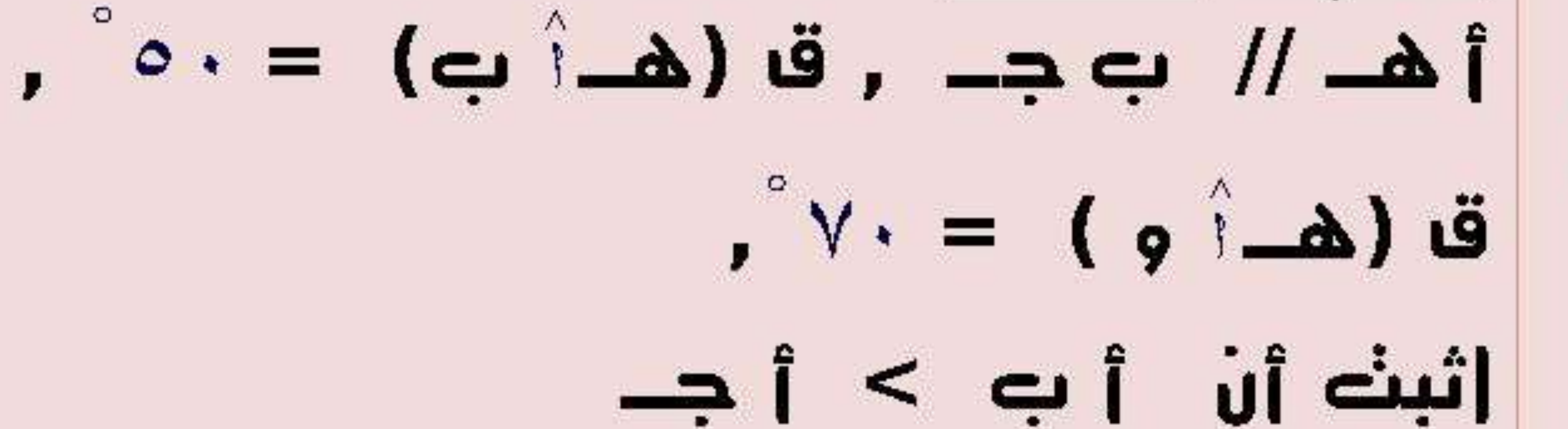
أسئلة مقالية

(١)	**فى الشكل المقابل** أهـ // ب جـ , ق (ءأ هـ) = ٧٠° , ق (هـأ جـ) = ٣٠° أثبت أن أ جـ > أ ب 
(٢)	١) فى Δ س ص ع ق (سَ) = ٣٠° , ق (صَ) = ٧٠° رتب أطوال اضلاع المثلث تصاعدياً ٢) فى Δ أ ب جـ ق (أ) = ٤٠° , ق (ب) = ٦٠° رتب أطوال اضلاع المثلث تنازلياً ٣) فى Δ أ ب جـ ق (أ) = ٤٠° , ق (ب) = ٧٥° رتب أطوال اضلاع المثلث تنازلياً ٤) فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ, ق (جـ) = ٥٠° رتب أطوال اضلاع المثلث تصاعدى
(٣)	**فى الشكل المقابل** أهـ // ب جـ , ق (ءأ هـ) = ٧٠° , ق (هـأ جـ) = ٣٠° أثبت أن أ جـ > أ ب 
(٤)	**فى الشكل المقابل** ق (ءأ ب) = ٤٠° , ق (بأ جـ) = ٨٠°, أ ء // ب جـ أثبت أن أ ب > أ جـ 
(٥)	**فى الشكل المقابل** أ ء // ب جـ , ق (بأ جـ) = ٧٠° , ق (ءأ جـ) = ٣٠°, برهن أن أ جـ > ب جـ 

(٦)



فى الشكل المقابل

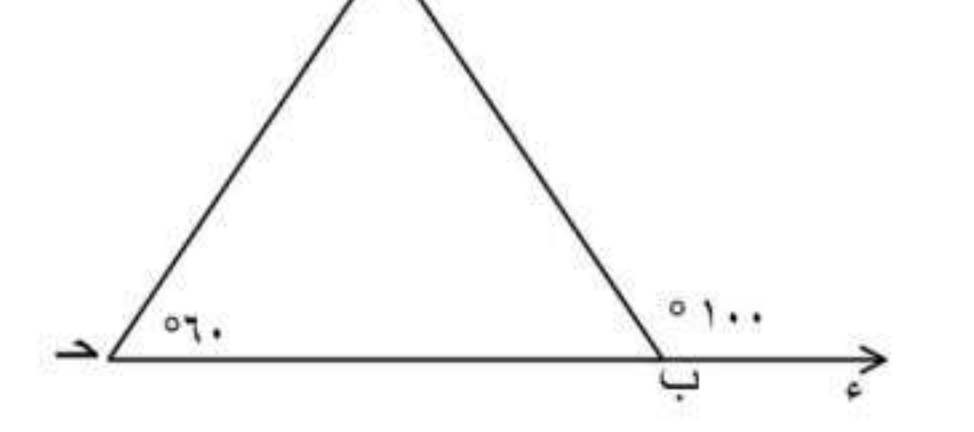


أهـ // بجـ ، ق (هـ أ ب) = ٥٠° ،

ق (هـ أ و) = ٧٠° ،

اثبت أن أ ب > أ جـ

(٧)

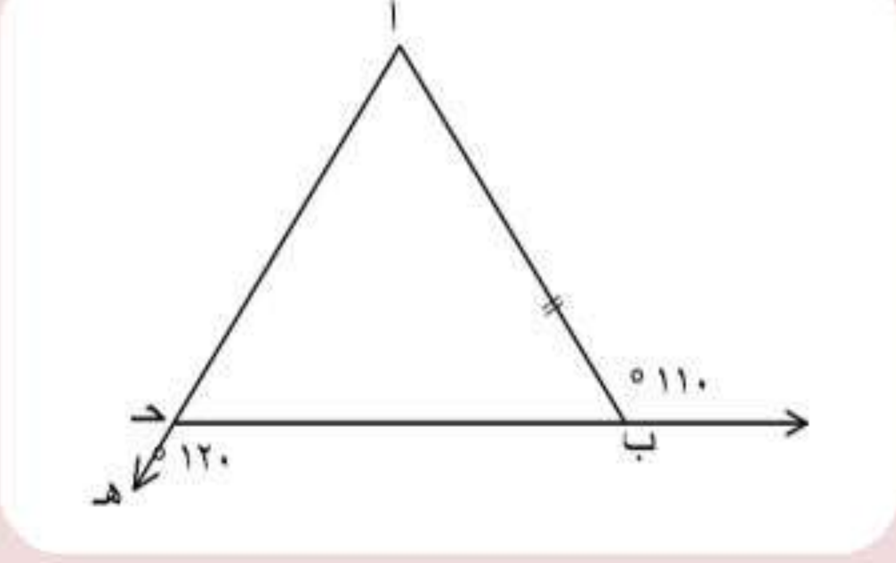


فى الشكل المقابل

ق (أ ب ء) = ١٠٠° ، ق (جـ) = ٦٠°

اثبت أن أ ب > ب جـ

(٨)



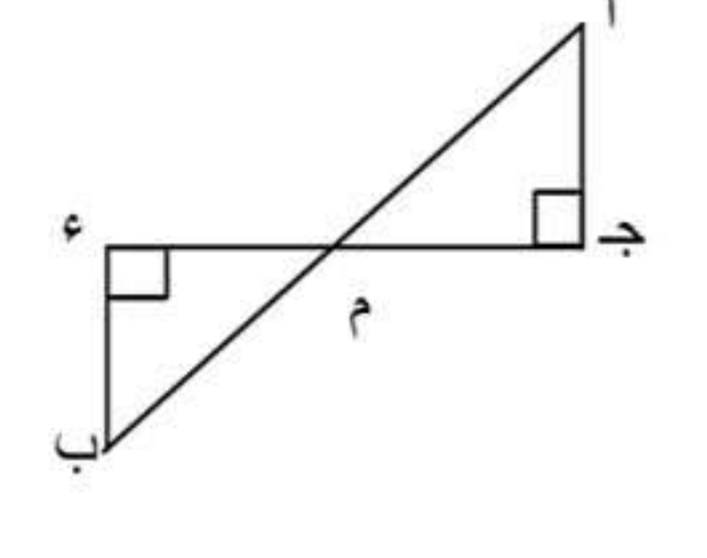
فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث ، ء ∈ جـ ب ، هـ ∈ أ جـ

ق (أ ب ء) = ١١٠° ، ق (ب جـ هـ) = ١٢٠°

برهن أ ب > ب جـ

(٩)



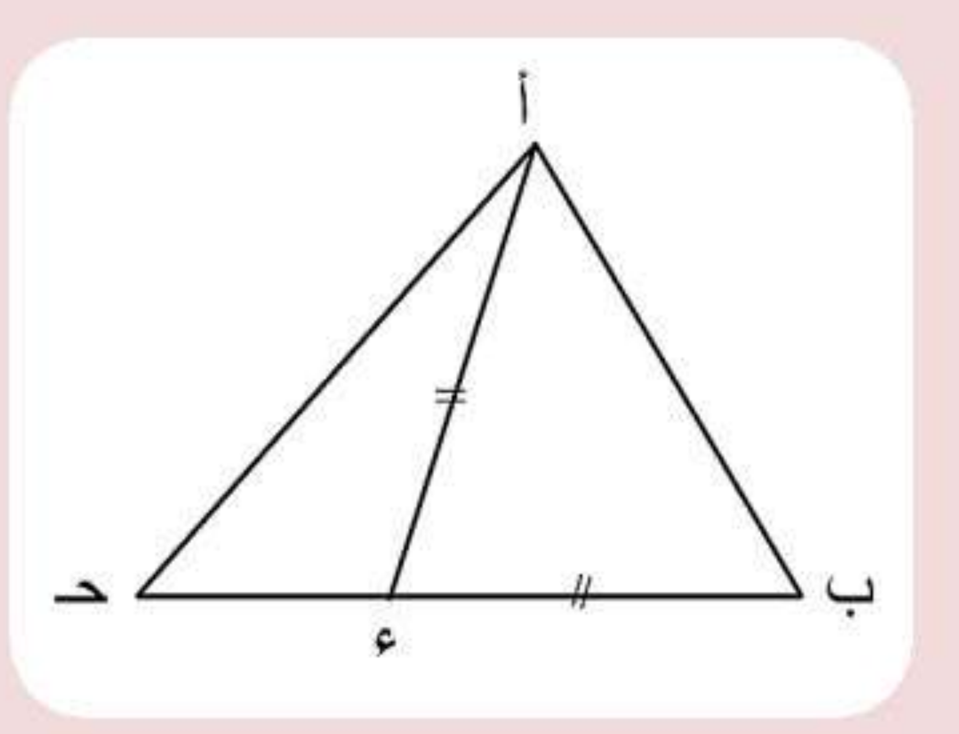
فى الشكل المقابل

أ ب ∩ جـ ء = { م }

أ جـ ⊥ جـ ء ، ب ء ⊥ جـ ء

برهن أن أ ب > جـ ء

(١٠)



فى الشكل المقابل

Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص ،

Δ ع و هـ قائم الزاوية فى و

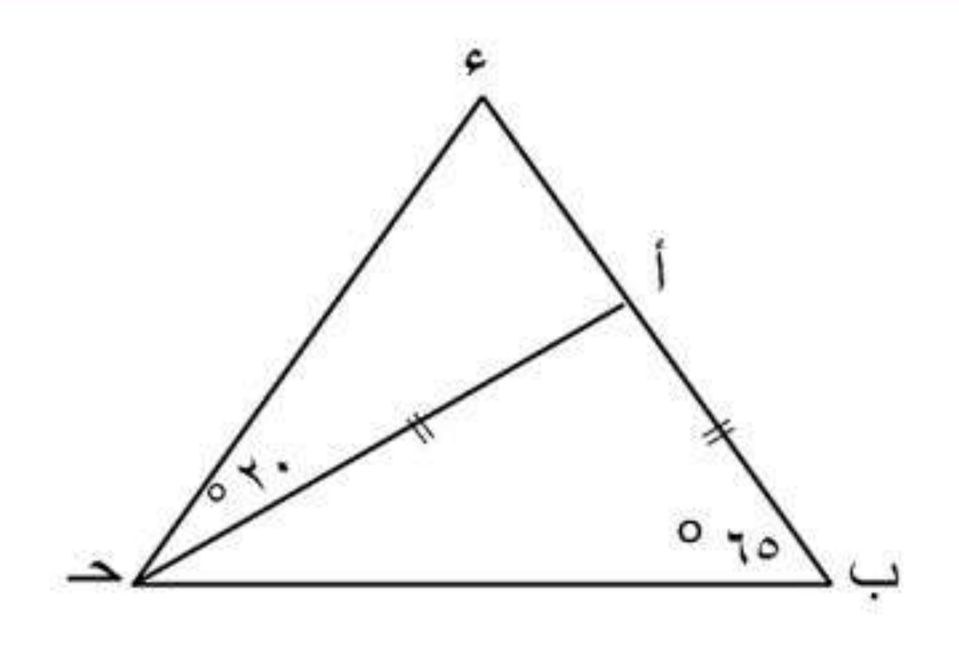
أثبت أ ن س هـ > ص و

(١١) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٦٥° ,

ق (أ $\hat{جـ}$ ء) = ٢٠° أ ∈ $\overleftarrow{ب ء}$

أثبت أن أ ب > أ ء

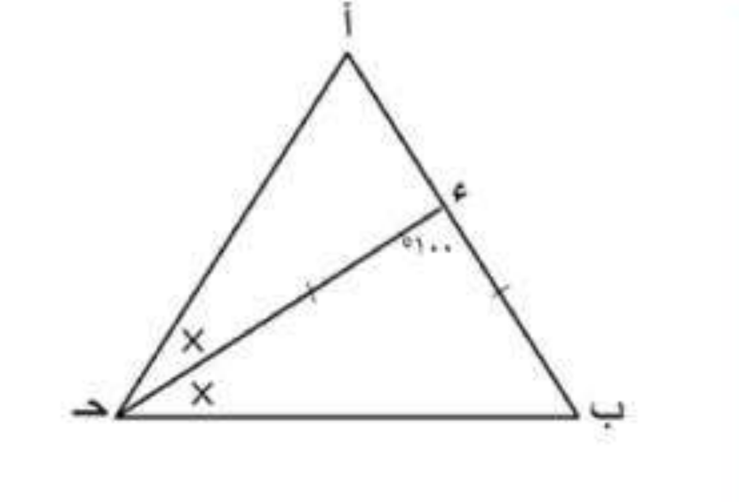


(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث $\overleftarrow{جـ ء}$ ينصف ($\hat{جـ}$)

ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ء ، ق (ب $\hat{ء}$ جـ) = ١٠٠°

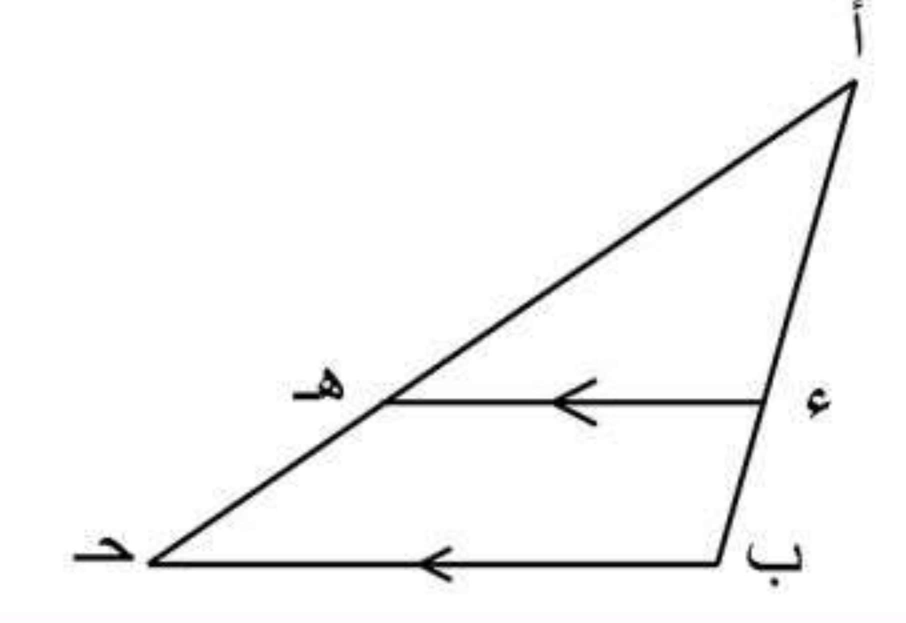
ء ب = ء جـ برهن أن أ جـ > ء ب



(١٣) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية فى ب

$\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ برهن أن أ هـ > أ ء



(١٤) أ ب جـ مثلث , ء ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب ء = أ ء

برهن أ ن ب جـ > أ جـ

(١٥) أ ب جـ مثلث $\overleftarrow{جـ ء}$ ينصف ($\hat{جـ}$) $\overleftarrow{جـ ء}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = { ء }

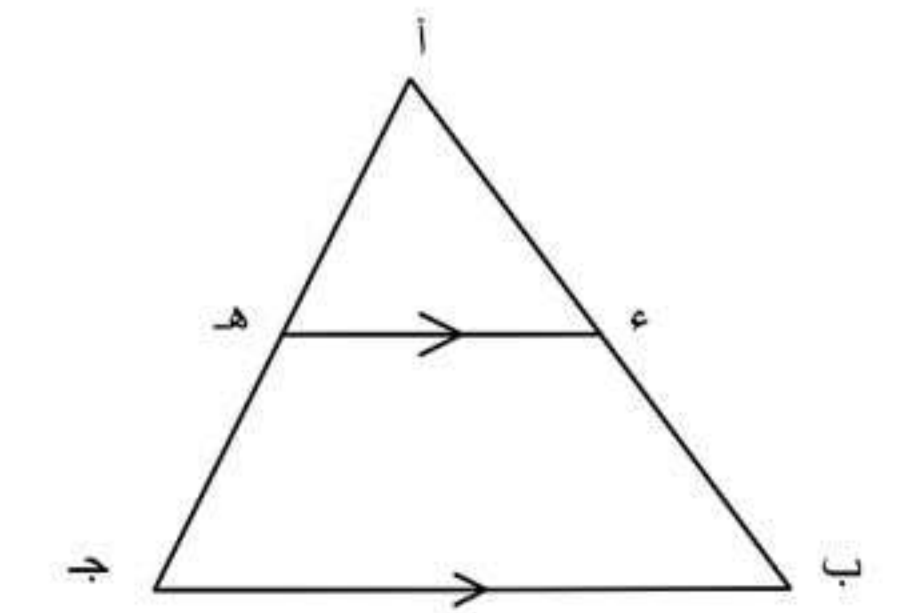
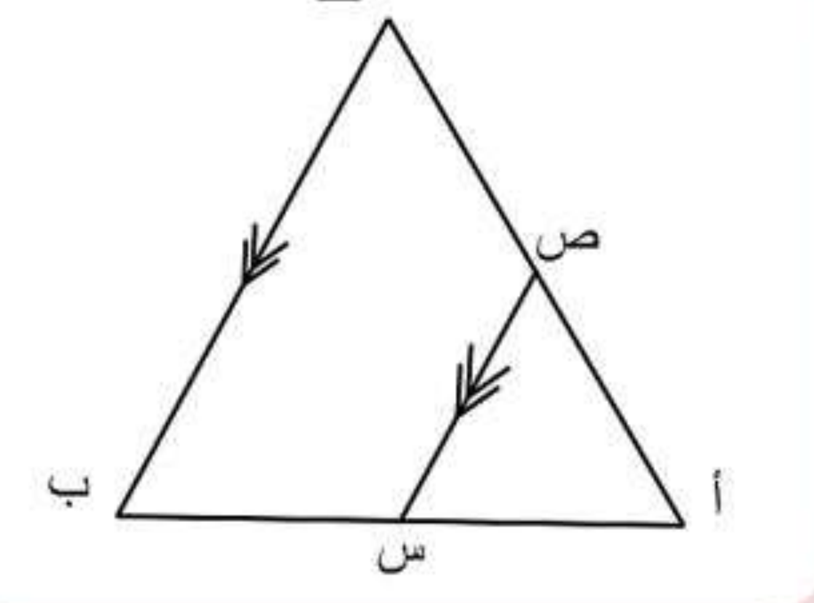
برهن أن ب جـ > ب ء

(١٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب , ء ∈ $\overline{أ جـ}$, هـ ∈ $\overline{ب جـ}$

بحيث أن أ ء = ب هـ أثبت أن ق (جـ $\hat{هـ}$ ء) > ق (جـ $\hat{ء}$ هـ)

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه ق ($\hat{أ}$) = ٦س , ق ($\hat{ب}$) = ٤س -٩ ,

ق ($\hat{جـ}$) = ٣س -٦ رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً

(١٨)	أ ب جـ مثلث فيه ق (أ̂) = ٥ س + ٢ , ق (ب̂) = ٦س -١٠ , ق (جـ̂) = س +٢٠ رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً
(١٩)	**فى الشكل المقابل** أ ب = أ جـ , ء هـ // ب جـ أثبت أن أ ء = أ هـ 
(٢٠)	**فى الشكل المقابل** أ ب > أ جـ , س ص // ب جـ أ ثبت أ ن أ س > أ ص 

الدرس الثالث

متباينة المثلث

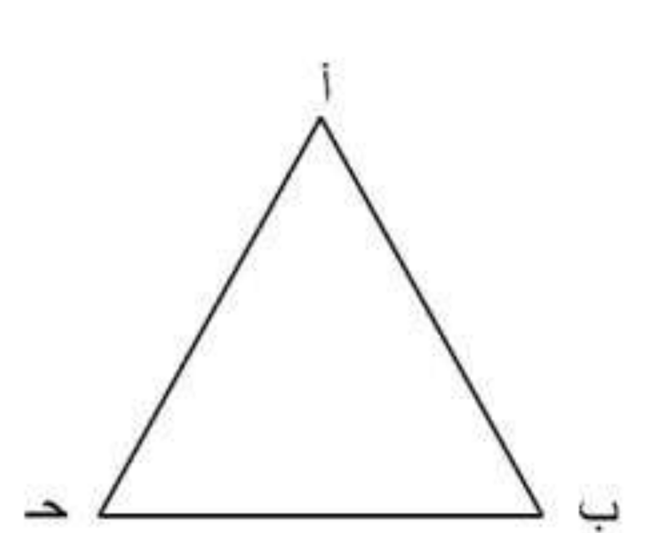
نظرية

فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

أ ب + ب جـ > أ جـ

أ ب + أ جـ > ب جـ

ب جـ + أ جـ > أ ب



نتيجة

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الاخرين وأقل من المجموع

أمثلة

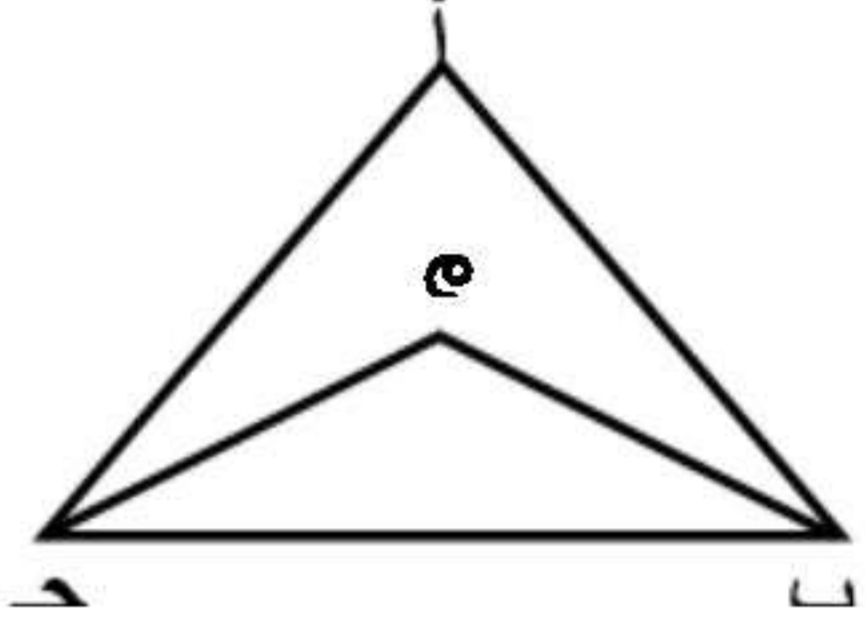
(١)



فى الشكل المقابل

إذا كان محيط ∆ س ص ع = ٥٠سم

إثبت أن س م + ص م + ع م > ٢٥



الحل

∆ س م ص فيه س م + م ص > س ص

∆ ص م ع فيه ص م + م ع > ص ع

∆ س م ع فيه س م + م ع > س ع بالجمع

س م+م ص + ص م + م ع + س م + م ع > س ص+ ص ع + س ع

٢ س م + ٢ م ص + ٢ م ع > ٥٠ ÷٢

س م + م ص + م ع > ٢٥

(٢)

بين أيا من الاطوال الاتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(١) ٢ ، ٥ ، ٣ (٢) ٣ ، ٧ ، ٥
(٣) ٧ ، ٣ ، ٢ (٤) ٤ ، ٩ ، ٦

الحل

(١) الاطوال ٢ ، ٥ ، ٣ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان
مجموع ٢ + ٣ = ٥ وليس أكبر من ٥

(٢) الاطوال ٣ ، ٧ ، ٥ تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان مجموع أى
ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

(٣) الاطوال ٧ ، ٣ ، ٢ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان
٣+٢ = ٥ وهو أصغر من الضلع الثالث وليس أكبر

(٤) الاطوال ٤ ، ٩ ، ٦ تصلح لان تكون أضلاع مثلث لان مجموع
أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

تمارين متباينة المثلث (٦)

(١) أكمل ما يأتى

(١)	مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث أ) أصغر من ب) أكبر من جـ) يساوى ء) نصف	(١)	مثلث له محور٣ تماثل واحد طول ضلعه ٥ سم فإن محيطه =... سم أ) ١٥سم ب) ٢٠ سم جـ) ٠ سم ء) ٢١ سم
(٢)	طول أى ضلع فى مثلث........ مجموع طوللى الضلعين الاخرين أ) أ كبر من ب) أصغر من جـ) يساوى ء) نصف	(٢)	إذا كان طولى ضلعين فى مثلث هما ٥ سم , ١٠ سم فإن طول الضلع الثالث ∋ .... أ) $]٥ ، ١٥]$ ب) $]٥ ، ١٥[$ جـ) $[٥ ، ١٥[$ ء) $[٥ ، ١٥]$
(٣)	أى من الاضلاع الاتية لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث......... أ) ٧ , ٧ , ٥ ب) ٩ , ٩ , ٩ جـ) ٣ , ٦ , ١٢ ء) ٣ , ٤ , ٥	(٣)	أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٦ سم ب جـ = ٨ سم فإن أ جـ ∋... أ) $]٢ ، ١٤]$ ب) $]٢ ، ١٤[$ جـ) $[٢ ، ١٤[$ ء) $[٢ ، ١٤]$
(٤)	إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم , ٧ سم فإن الضلع الثالث يساوى أ) ٧سم ب) ٣ سم جـ) ٤ سم ء) ١٠ سم	(٤)	Δ أ ب جـ يكون أ ب + ب جـ - أ جـ ..... صفر أ) < ب) > جـ) = ء) ≤
(٥)	إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٥ سم , ١٠ سم فإن طول الضلع الاخر يساوى .... أ) ٥سم ب) ١٠ سم جـ) ١٥ سم ء) ٧ سم	(٥)	Δ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أب + ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ..... ١ أ) < ب) > جـ) = ء) ≤
(٦)	إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٧ سم , ٤ سم فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون .... أ) ١سم ب) ٢ سم جـ) ٣ سم ء) ٤ سم	(٦)	Δ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ + ب جـ}}$ .... ١ أ) < ب) > جـ) = ء) ≤

(٧)	مثلث له محور تماثل واحد طول ضلعين فيه ٤ سم , ٨ سم فإن محيطه = ... سم أ) ١٠ سم ب) ٢٠ سم جـ) ٣٠ سم ء) ٤٠ سم	(٧)	Δ أ ب جـ إ ذا كان ق ($\hat{ب}$)=٤٥° , ق ($\hat{أ}$) = ٥٠° , فإن أكبر الاضلاع طولا هو .... أ) أ ب ب) ب جـ جـ) أ جـ ء) أ ء

أسئلة مقالية

(١)	**هل يمكن رسم مثلث أطوال اضلاع** ١) ٥ سم , ٧ سم , ١٢ سم ٢) ٤ سم , ٦ سم , ١١ سم ٣)١٤ سم , ٩ سم , ٧ سم ٤) ٨ سم , ١٤ سم , ٨ سم ٥) ٣ سم , ٤ سم , ٩ سم ٦) ٥ سم , ٧ سم , ٨ سم ٧)١٠ سم , ٦ سم , ٤ سم
(٢)	**أ وجد الفترة التى ينتمى إليها الضلع الثالث** ١) ٦ سم , ٩ سم ٢) ٣ سم , ٣ سم ٣) ٣سم , ٤ سم ٤) ٥,٧ سم , ٢,٦ سم ٥) ١١ سم , ٨ سم
(٣)	**فى الشكل المقابل** أ ب جـ مثلث , م نقطة داخلة م ب + م جـ > $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب جـ 